华章数学译丛

6

Complex Variables and Applications

(Seventh Edition)

复变函数及应用

（原书第7版）

（美）James Ward Brown
Ruel V. Churchill 著
邓冠铁 等译

McGraw Hill Education

HZ BOOKS





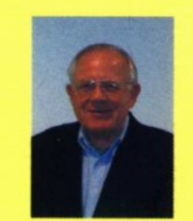
（原书第7版）

复变函数及应用

本书初版于20世纪40年代，是经典的本科数学教材之一，对复变函数的教学影响深远，被美国加州理工学院、加州大学伯克利分校、佐治亚理工学院、普度大学、达特茅斯学院、南加州大学等众多名校采用。本书阐述了复变函数的理论及应用，还介绍了留数及保形映射理论在物理、流体及热传导等边值问题中的应用。

新版对原有内容进行了重新组织，增加了例题和图，更加方便教学。

作者简介

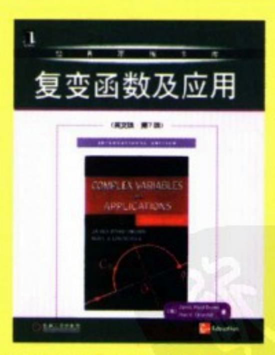


James Ward Brown 密歇根大学迪尔本分校数学系教授，美国数学学会会员。1964年于密歇根大学获得数学博士学位。他曾经主持研究美国国家自然科学基金项目，获得过密歇根大学杰出教师奖，并被列入美国名人录。

Ruel V. Churchill 已故密歇根大学知名教授。早在60多年前，就开始编写一系列经典教材。除本书外，还与James Ward Brown合著有*Fourier Series and Boundary Value Problems*。

Complex Variables and Applications

(Seventh Edition)



ISBN 7-111-13304-8
定价：42.00 元





华章图书

华章网站 http://www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
北京市西城区百万庄南街1号 100037
读者服务热线：(010)68995259，68995264
读者服务信箱：hzedu@hzbook.com
ISBN 7-111-15830-X/O・395（课）
定价：32.00 元

McGraw Hill

华章数学译丛

6

Complex Variables and Applications

(Seventh Edition)

复变函数及应用

(原书第7版)

(美) James Ward Brown
Ruel V. Churchill 著

邓冠铁 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书始印于20世纪40年代，再版多次，是经典的数学教材之一．本书阐述了复变函数及其应用方面的重要理论，还介绍了留数及保形映射理论在物理、流体流动及热传导等边值问题中的应用．

本书内容丰富，写作精炼，论证严密，可作为高等院校数学或相关专业本科生和研究生的教材及参考书．

本书版权登记号：图字：01-2003-7220

图书在版编目（CIP）数据

复变函数及应用（原书第7版）/（美）布朗（Brown, J. W.）等著；邓冠铁等译．—北京：机械工业出版社，2005.2

（华章数学译丛）

书名原文：Complex Variables and Applications, Seventh Edition

ISBN 7-111-15830-X

Ⅰ．复…　Ⅱ．①布…　②邓…　Ⅲ．复变函数-高等学校-教材　Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第135143号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：迟振春　蒋　祎

北京中兴印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005年2月第1版第1次印刷

787mm×1092mm　1/16·22.5印张

印数：0 001-5 000册

定价：32.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010) 68326294

关 于 作 者

James Ward Brown 是密歇根大学迪尔本分校数学系教授．他在哈佛大学取得理学学士学位，继而在密歇根大学科学技术学院取得了硕士和博士学位．他与 Churchill 合著有 *Fourier Series and Boundary Value Problems*．他曾经主持研究美国国家自然科学基金项目，获得过杰出教师奖，并被列入美国名人录．

Ruel V. Churchill 是已故密歇根大学知名教授．他在芝加哥大学取得理学学士学位，于密歇根大学取得物理学硕士及数学博士学位．他自 1922 年起在密歇根大学执教．他和 James Ward Brown 在 60 年前合著的经典教材 *Fourier Series and Boundary Value Problems* 已经再版六次．他还单独著有 *Operational Mathematics* 一书，也已再版三次．他曾在美国数学学会等数学研究机构担任过多项职务．

译者序

本书原书是美国密歇根大学使用过多年的经典教材. 本书不仅涵盖了复变函数的基本理论和方法，且对于复变函数的留数与保形映射理论在物理、流体流动及热传导等边值问题中的应用做了详细的介绍. 后面几章的例题及练习常常是工程使用中所遇到的实际情况，多做这些练习，可以加强应用定理的能力. 本书内容丰富，写作精炼，论证严密. 书中出现的所有定义、定理等的叙述和证明都非常详细、清晰、精确. 此外，本书提供了很多练习和例子，非常适合自学. 数学、工程或物理学的高年级学生和研究生或任何学过“微积分”课程的学生都可使用本书.

本书由多人共同翻译完成. 其中第 1 章由邓冠铁翻译；序言及第 4 章由高志强翻译；第 2 章由杨向东翻译；第 3 章和第 6 章由李红伟翻译；第 5 章由龙品红翻译；第 7 章由宁菊红翻译；第 8 章由张艳慧翻译；第 9、10 章由赖苗翻译；第 11、12 章由梁新刚翻译. 在翻译过程中，译者力求忠实于原文，同时也兼顾中文表达的流畅. 但由于译者水平有限，译文中难免有错误和疏漏之处，请读者不吝指正.

邓冠铁

2004 年 10 月

于北京师范大学数学科学学院

前　言

本书是在 1996 年出版的第 6 版的基础上进行修订的，与前几版相同，这一版仍是作为复变函数理论及应用这一基础课的教材，可供一个学期使用，它保持了以前版本的基本内容及风格．本书的前两版是由已故的 Ruel V. Churchill 教授单独完成的．

在这一版中，最大的改动在前九章，这些内容是作为一学期课程的核心内容．其余的三章是关于物理应用的，可以选取一部分作为课程内容，但主要由学生自学或查阅．

与第 6 版相比，这一版增加了 30 个新图形；重新绘制了部分插图．为强调某些专题，将某些节进一步拆分成了小节，并专门为讲解例子增添了很多新的小节．对那些可以略过但不会因此脱节的节次标明得更清楚，从而可选择那些最基本的内容作为初次接触这门课的教学内容．在整本书中，练习比第 1 版中出现得更加频繁．但每个练习的数量也因此变少，更便于教师布置作业．

这一版的另一改进在于对第 2 章中关于映射的介绍进行了简化，并引入了指数函数的映射性质．为了使内容更连贯，对第 3 章初等函数中的小节进行了重新安排．例如，将对数一节直接放到了指数函数后，将三角函数和双曲函数的节次与关于它们的反函数的节次相邻．根据过去几年中使用这本书的一些读者的意见，我们将练习中的一些重要材料放入了正文中．例如，第 6 章关于解析函数的孤立零点及第 7 章中关于沿不规则路径积分的讨论．

本书的第一个目标是详细阐述在应用中占重要地位的理论部分，第二个目标是介绍留数和保形映射的应用，特别强调了保形映射在解决热传导、电位及流体问题而涉及的边值问题中的作用．因此这本书可看作是作者另一著作 *Fourier Series and Boundary Value Problems* 及 Ruel V. Churchill 的 *Operational Mathematics* 的姊妹篇，在这两本书中阐述了解决偏微分方程边值问题的其他经典方法．后者也包括与拉普拉斯变换相关的留数的进一步应用．

本书在密歇根大学作为一学期每周 3 课时的课程的教材使用过很多年，使用者主要是数学、工程或物理学的高年级学生和研究生．在学习这门课以前，他们都学习过三学期的微积分课程及一学期的常微分课程，有的还学习了高等微积分课程．为了适应尽可能多的读者，在需要查阅微积分中结果的证明及应用的地方都给出了脚注．这本书的一些材料在课堂上无法讲授，可留给学生自学．如果初

等函数的映射及保形映射的应用需要在课堂上提早讲述，那么可以在讲完第 3 章初等函数后就直接讲述第 8、9、10 章．

大多数的基本结果被列为定理或推论，在后面有例子和练习对这些结果做进一步的说明．在附录 A 的参考文献中给出了进一步研究的材料，附录 B 中列出了在应用中非常有用的保形映射图清单．

在本版的修订过程中，感谢许多人提供的支持和帮助，其中包括我的家人、同事和学生，他们是 Jacqueline R. Brown，Ronald P. Morash，Margret H. Höft，Sandra M. Weber，Joyce A. Moss，还有麦格劳-希尔出版社的编辑 Robert E. Ross 和 Michelle D. Munn.

James Ward Brown

目　录

第1章 复　　数

在本章中，我们将全面论述复数系的代数和几何结构．我们假设实数的各个对应性质是已知的．

1　加法与乘积

复数可定义为一有序实数对(x, y)，正如实数x可认为是实轴上的点一样，复数(x, y)可解释为复平面中的点，其直角坐标为x和y．当实数x看作实轴上的点$(x, 0)$时，则实数集是复数集的一个子集．形如$(0, y)$的复数对应于y轴上的点，称为*纯虚数*；称y轴为*虚轴*．

习惯上用z表示复数(x, y)，因而

$$z = (x, y). \tag{1}$$

x和y，分别称为复数z的*实部*和*虚部*．记作

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y. \tag{2}$$

复数$z_1=(x_1, y_1)$和$z_2=(x_2, y_2)$相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等．于是$z_1=z_2$是指z_1和z_2对应复平面(或z平面)中相同的点．

1

两复数$z_1=(x_1, y_1)$和$z_2=(x_2, y_2)$的*和*z_1+z_2以及*乘积*z_1z_2定义如下：

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{3}$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2). \tag{4}$$

注意当限制到实数时，由方程(3)和(4)定义的运算成为通常的加法和乘法运算：

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

因此复数系是实数系的自然推广．

任何复数$z=(x, y)$可写成$z=(x, 0)+(0, y)$且容易看出$(0, 1)(y, 0)=(0, y)$．因此

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0);$$

并且如果我们把实数看成x或$(x, 0)$并用i表示*虚数*$(0, 1)$(参见图1)[⊖]，则有

$$z = x + iy. \tag{5}$$

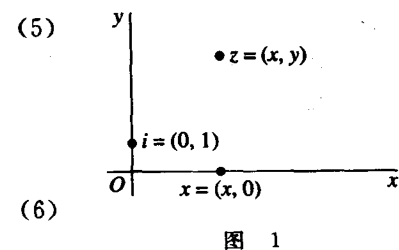


图　1

通过约定$z^2=zz$，$z^3=zz^2$，等等，我们发现有

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

或

$$i^2 = -1. \tag{6}$$

根据表达式(5)，定义(3)或(4)成为

⊖ 在电学中，用字母j代替i．

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{7}$$

2

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2). \tag{8}$$

注意到这些方程右边可通过如下方式得到：即形式地把左边的每一项当成实数进行运算，遇到 i^2 用 -1 代替.

2 基本代数性质

复数的加法和乘法的各种性质与实数的加法和乘法的各种性质相同. 我们列出其中的最基本代数性质，并证明它们中的一些基本代数性质. 其他基本代数性质在练习中证明.

交换律

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z_1z_2=z_2z_1 \tag{1}$$

和结合律

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3) \tag{2}$$

容易从第 1 节中复数的加法和乘法的定义和实数运算满足的法则得出. 例如，如果 $z_1=(x_1, y_1)$和 $z_2=(x_2, y_2)$，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_2+x_1,y_2+y_1)=z_2+z_1.$$

如上其余法则以及分配律

$$z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2 \tag{3}$$

的证明是类似的.

根据乘法的交换律，有 $iy=yi$. 因此我们可用 $z=x+yi$ 代替 $z=x+iy$. 同样因为结合律，正如实数一样，不用括号的和 $z_1+z_2+z_3$ 或乘积 $z_1z_2z_3$ 是有定义的.

实数的加法单位元 $0=(0, 0)$和乘法单位元 $1=(1, 0)$完全可以移到复数系中来. 即对每一个复数 z

$$z+0=z \quad 和 \quad z\cdot 1=z. \tag{4}$$

此外，0 和 1 是唯一满足此性质的的复数(参见练习 9).

对每一个复数 $z=(x, y)$，有一个相应的加法逆元

$$-z=(-x,-y) \tag{5}$$

满足方程 $z+(-z)=0$. 此外，由方程$(x, y)+(u, v)=(0, 0)$可推出 $u=-x$, $v=-y$，对每一个复数 z，只有一个相应的加法逆元. 由于$-(iy)=(-i)y=i(-y)$(练习 8)，表达式(5)

3

无疑也可写成$-z=-x-iy$. 加法逆元可用来定义减法：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2). \tag{6}$$

因而，如果 $z_1=(x_1, y_1)$和 $z_2=(x_2, y_2)$那么

$$z_1-z_2=(x_1-x_2,y_1-y_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{7}$$

对任何非零复数 $z=(x, y)$，存在一个复数 z^{-1}满足 $zz^{-1}=1$. 这个乘法逆元没有加法逆元那么明显. 为了找出这个乘法逆元，我们寻找实数 u 和 v 使得

$$(x,y)(u,v) = (1,0).$$

根据第 1 节定义两个复数的乘法的方程(1)，u 和 v 必须满足一对线性齐次方程

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0,$$

简单的计算得到唯一的解

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

因而 $z=(x,\ y)$的乘法逆元是

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \quad (z \neq 0).$$

当 $z=0$ 时，乘法逆元 z^{-1}没有定义．事实上，$z=0$ 意味着 $x^2+y^2=0$；这在表达式(8)中是不允许的.

练习

1. 验证下列等式：

(a)$(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=-2i$；　　(b)$(2,\ -3)(-2,\ 1)=(-1,\ 8)$；

(c)$(3,\ 1)(3,\ -1)\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{10}\right)=(2,\ 1)$.

2. 证明

(a)$\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}\ z$；　　(b)$\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}\ z$.

3. 证明$(1+z)^2=1+2z+z^2$.

4. 验证两个复数 $z=1\pm i$ 中的每一个满足方程 $z^2-2z+2=0$.

5. 证明乘法的交换律，即第 2 节方程(1)中的第二式.

6. 验证

(a)加法的结合律，即第 2 节方程(2)中的第一式；

(b)第 2 节分配律(3).

4

7. 用加法的结合律和分配律证明

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

8. 记 $i=(0,\ 1)$和 $y=(y,\ 0)$，证明$-(iy)=(-i)y=i(-y)$.

9. (a)记$(x,\ y)+(u,\ v)=(x,\ y)$，指出复数 $0=(0,\ 0)$作为加法单位元是满足此性质的唯一加法单位元.

(b)记$(x,\ y)(u,\ v)=(x,\ y)$，证明复数 $1=(1,\ 0)$作为乘法单位元是满足此性质的唯一乘法单位元.

10. 通过记

$$(x,y)(x,y) + (x,y) + (1,0) = (0,0),$$

然后解关于 x 和 y 的线性齐次方程，解关于 $z=(x,\ y)$的方程 $z^2+z+1=0$.

提示：利用任何实数 x 不满足给定的方程这一事实证明 $y\neq 0$.

答案：$z=\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3 其他性质

在这一节中，我们叙述一系列复数的加法和乘法的其他代数性质，这些性质能从第 2 节已经叙述的性质中推出．因为这样的性质对实数也成立，从而这样的性质对复数可预计是继续有效的，读者可直接阅读第 4 节而没有太大的损失．

首先注意到乘法逆元的存在性使我们能证明：*如果乘积 $z_1z_2=0$ 是零，则因子 z_1 和 z_2 中至少有一个是零*．因为假设 $z_1z_2=0$ 和逆元 z_1^{-1} 存在；根据乘法的定义任何复数乘零是零．因此

$$z_2=1\cdot z_2=(z_1^{-1}z_1)z_2=z_1^{-1}(z_1z_2)=z_1^{-1}\cdot 0=0.$$

即，如果 $z_1z_2=0$，或者 $z_1=0$ 或者 $z_2=0$；或者 z_1 和 z_2 都等于零．说明这一结果的另一方法是：*如果两个复数 z_1 和 z_2 都是非零复数，则它们的乘积 z_1z_2 也是非零复数*．

除以一个非零复数定义如下：

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}\quad(z_2\neq 0). \tag{1}$$

如果 $z_1=(x_1, y_1)$ 和 $z_2=(x_2, y_2)$，此处的(1)和第 2 节的表达式(8)说明

5

$$\frac{z_1}{z_2}=(x_1,y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

即，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0). \tag{2}$$

虽然表达式(2)不容易记住，但可以通过写(参看练习 7)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}, \tag{3}$$

然后把右边的分子和分母分别乘出得到，最后利用性质

$$\frac{z_1+z_2}{z_3}=(z_1+z_2)z_3^{-1}=z_1z_3^{-1}+z_2z_3^{-1}=\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}\quad(z_3\neq 0). \tag{4}$$

从方程(3)出发的动机在第 5 节说明．

涉及商的等式可从如下关系得出

$$\frac{1}{z_2}=z_2^{-1}\quad(z_2\neq 0), \tag{5}$$

这就是当 $z_1=1$ 时的方程(1)．关系(5)使我们能把方程(1)写成形式

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)\quad(z_2\neq 0). \tag{6}$$

同样，注意到(参看练习 3)

$$(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_1^{-1})(z_2z_2^{-1}) = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0),$$

和$(z_1z_2)^{-1}=z_1^{-1}z_2^{-1}$，我们能用关系(5)证明

$$\frac{1}{z_1z_2} = (z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \tag{7}$$

另一个有用的、将在练习中导出的等式是

$$\frac{z_1z_2}{z_3z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \tag{8}$$

6

例　现验证如下的计算：

$$\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{(2-3i)(1+i)} = \frac{1}{5-i}\cdot\frac{5+i}{5+i} = \frac{5+i}{(5-i)(5+i)}$$
$$= \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i$$

最后，关于实数的二项式公式对复数仍然成立. 即：如果 z_1z_2 是两复数

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^{n-k}z_2^k \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

其中

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

且约定 $0! = 1$. 其证明用数学归纳法，留作练习.

练习

1. 把如下的量化为实数：

(a)$\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$；　　(b)$\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$；　　(c)$(1-i)^4$.

答案：(a)$-2/5$；(b)$-1/2$；(c)-4.

2. 证明

(a)$(-1)z=-z$；　　(b)$\dfrac{1}{1/z}=z(z\neq 0)$.

3. 用乘法的结合律和交换律证明

$$(z_1z_2)(z_3z_4) = (z_1z_3)(z_2z_4).$$

4. 证明如果 $z_1z_2z_3=0$，则三个因子中至少有一个是 0.

提示：重写为$(z_1z_2)z_3=0$ 且利用关于两个因子(第 3 节)的类似结果.

5. 利用第 3 节表达式(2)后面描述的方法，导出关于商$\dfrac{z_1}{z_2}$的第 3 节表达式(2).

6. 借助第 3 节关系(6)和(7)，导出等式(8).

7. 利用第3节等式(8)导出消除律:

$$\frac{z_1 z}{z_2 z}=\frac{z_1}{z_2} \quad (z_2\neq 0, z\neq 0).$$

7

8. 用数学归纳法验证第3节二项式公式(9). 具体地说，首先注意到这一公式当 $n=1$ 时是成立的. 然后假设这一公式当 $n=m$ 是成立的，其中 m 表示任一正整数，证明当 $n=m+1$ 时这一公式也必须成立.

4 模

对每一个非零复数 $z=x+iy$，很自然对应复平面一个从原点到点 (x, y) (第1节)的有向线段或一个向量. 事实上，我们常常称 z 为点 z 或向量 z. 在图2中数 $z=x+iy$ 和 $-2+i$ 在图上表示成点和半径向量.

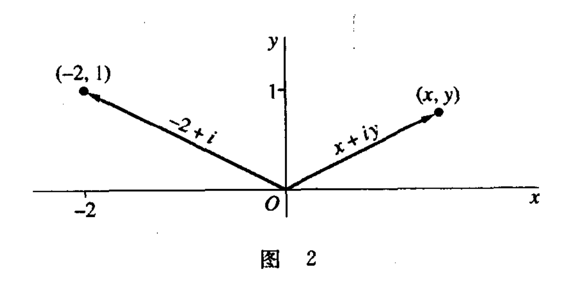


图 2

根据两复数 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$ 的和的定义，数 z_1+z_2 对应点 (x_1+x_2, y_1+y_2). 它也对应其分量是它的分量的向量. 因此 z_1+z_2 可如图3显示那样用平行四边形法则得到. 差 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ 对应向量 z_1 与 $-z_2$ 的和(参见图4).

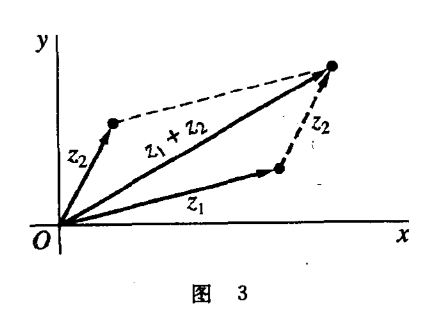


图 3

虽然两复数 z_1 和 z_2 的乘积本身也是复数，也可以用位于 z_1 和 z_2 所在的平面中的向量表示，但这一乘积不是标量也不是用普通的向量分析方法得到的向量.

在把实数的绝对值的概念推广到复数时，复数的向量表示特别有用. 一个复数 $z=x+iy$ 的模或绝对值定义为一个非负数且表示为 $|z|$；即，

8

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

几何上，数 $|z|$ 是点 (x, y) 到原点的距离，或表示 z 的向量长度. 当 $y=0$ 时，此数在实数系

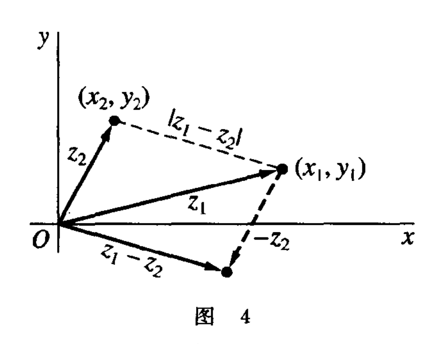


图 4

中是通常的绝对值. 注意除非 z_1 和 z_2 是实数，否则不等式 $z_1<z_2$ 无意义. $|z_1|<|z_2|$ 表示点 z_1 比点 z_2 更靠近原点.

例 1　由于 $|-3+2i|=\sqrt{13}$ 和 $|1+4i|=\sqrt{17}$，点 $-3+2i$ 比 $1+4i$ 更靠近原点.

两点 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$ 之间的距离是 $|z_1-z_2|$. 这从图 4 中可看出，由于 $|z_1-z_2|$ 是向量 z_1-z_2 的长度；通过平移半径向量 z_1-z_2，可把 z_1-z_2 解释成从点 (x_2, y_2) 到点 (x_1, y_1) 的有向线段. 另外，这也可以从表达式

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

和定义

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

得到.

圆心在 z_0 半径为 R 的圆周上的点与满足方程 $|z-z_0|=R$ 的复数 z 是一一对应的. 我们把这些点的集合简写为圆 $|z-z_0|=R$.

例 2　方程 $|z-1+3i|=2$ 表示中心在 $z_0=(1, -3)$，半径为 $R=2$ 的圆周.

从定义(1)得到实数 $|z|$，$\text{Re}\, z=x$，$\text{Im}\, z=y$ 满足方程

$$|z|^2=(\text{Re}\, z)^2+(\text{Im}\, z)^2. \tag{2}$$

$$\text{Re}\, z\leqslant|\text{Re}\, z|\leqslant|z| \quad \text{和} \quad \text{Im}\, z\leqslant|\text{Im}\, z|\leqslant|z|. \tag{3}$$

现回到三角不等式，此不等式对两个复数 z_1 和 z_2 的模给出了一个上界.

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{4}$$

如图 3，这个不等式几何上的重要性是明显的，因为它说明了三角形的一边的长度小于或等于另外两边长度的和. 当 z_1 和 z_2 是共线时，从图 3 中可以看出不等式(4)实际上是等式. 另外，严格的代数证明在第 5 节练习 16 中给出.

三角不等式的一个直接结果是

$$|z_1+z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{5}$$

为了导出不等式(5)，可以写

$$|z_1|=|(z_1+z_2)+(-z_2)|\leqslant|z_1+z_2|+|-z_2|,$$

这说明

$$|z_1+z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{6}$$

当 $|z_1|\geqslant|z_2|$ 时，这就是不等式(5)，如果 $|z_1|<|z_2|$，只需在不等式(6)中交换 z_1 和 z_2 的位置，得到

$$|z_1+z_2|\geqslant-(|z_1|-|z_2|),$$

这就是所希望的结果．当然，不等式(5)说明三角形的一边的长度大于或等于另外两边长度之差．

因为 $|-z_2|=|z_2|$，在不等式中(4)和(5)可用 $-z_2$ 代替 z_2，我们把这些结果概括成特别有用的形式：

$$|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{7}$$

$$|z_1\pm z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{8}$$

例3 如果点 z 在圆心为零的圆周 $|z|=1$ 上，则

$$|z-2|\leqslant|z|+2=3$$

且

10

$$|z-2|\geqslant||z|-2|=1.$$

三角不等式(4)用数学归纳法可以推广到有限项和：

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \quad (n=2,3,\cdots). \tag{9}$$

为了在这里给出归纳法的详细的证明，注意当 $n=2$ 时不等式(9)就是不等式(4)．进一步，如果不等式(9)假设当 $n=m$ 时成立，则当 $n=m+1$ 时不等式(9)也必定成立，这是因为，根据不等式(4)

$$|(z_1+z_2+\cdots+z_m)+z_{m+1}|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_m|+|z_{m+1}|$$
$$\leqslant(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|)+|z_{m+1}|.$$

练习

1. 当

(a) $z_1=2i$，$z_2=\frac{2}{3}-i$； (b) $z_1=(-\sqrt{3},\ 1)$，$z_2=(\sqrt{3},\ 0)$；

(c) $z_1=(-3,\ 1)$，$z_2=(1,\ 4)$； (d) $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_1-iy_1$ 时，

用向量标出数 z_1+z_2 和 z_1-z_2 的位置．

2. 验证第4节关于 $\operatorname{Re} z$、$\operatorname{Im} z$ 和 $|z|$ 的不等式(3)．

3. 验证 $\sqrt{2}|z|\geqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$．

提示：把不等式变为 $(|x|-|y|)^2\geqslant0$

4. 在如下情况下，画出满足给定条件的点集的草图．

(a) $|z-1+i|=1$； (b) $|z+i|\leqslant3$； (c) $|z-4i|\geqslant4$.

5. 利用 $|z_1-z_2|$ 表示两点 z_1 和 z_2 之间的距离，给出如下的几何证明：

(a) $|z-4i|+|z+4i|=10$ 表示其焦点是$(0, \pm 4)$的椭圆；

(b) $|z-1|=|z+i|$ 表示通过原点斜率为-1的直线.

5　共轭复数

一个复数 $z=x+iy$ 的共轭复数，或简称为共轭，定义为复数 $x-iy$，表示为 $\bar{z}$；即

$$\bar{z}=x-iy. \tag{1}$$

用点$(x, -y)$表示数 $\bar{z}$，这是表示 z 的点(x, y)关于实轴的反射(图 5)．注意对任意 z，有

$$\bar{\bar{z}}=z \quad 和 \quad |\bar{z}|=|z|$$

图　5

如果 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$，则

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)\\&=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2).\end{aligned}$$

因此和的共轭等于共轭的和：

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}. \tag{2}$$

类似地，容易证明

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}, \tag{3}$$

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}, \tag{4}$$

和

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2\neq 0). \tag{5}$$

复数 $z=x+iy$ 和它的共轭 $\bar{z}=x-iy$ 的和是实数 $2x$，差是纯虚数 $2iy$．因此

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z=-\frac{z-\bar{z}}{2i}, \tag{6}$$

复数 $z=x+iy$ 的共轭与它的模有一个重要等式

$$z\bar{z}=|z|^2, \tag{7}$$

其中每边都等于 x^2+y^2．这给出了决定第 3 节的表达式(3)中的商 z_1/z_2 的一个方法．这方法是将 z_1/z_2 的分子和分母同时乘以$\overline{z_2}$，从而使分母变成实数.

例 1　作为一个例子

$$\frac{-1+3i}{2-i}=\frac{(-1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-5+5i}{|2-i|^2}=\frac{-5+5i}{5}=-1+i.$$

11 ~ 12

也可参看第 3 节末的例子.

在从如上所述的共轭复数的性质得到模的性质中，等式(7)特别有用．我们叙述

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{8}$$

和

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0). \tag{9}$$

记住模是非负的，通过写

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)(\overline{z_1}\,\overline{z_2}) = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

性质(8)就可以得到．性质(9)可用类似的方法验证．

例 2 性质(8)告诉我们 $|z^2| = |z|^2$ 和 $|z^3| = |z|^3$．因此如果 z 位于中心在原点、半径为 2 的圆内，则 $|z| < 2$，从第 4 节中的广义三角不等式(9)得到

$$|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| \leqslant |z|^3 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 < 25.$$

练习

1. 利用第 5 节建立的共轭和模的性质证明

(a) $\overline{\overline{z}+3i} = z - 3i$；　　(b) $\overline{iz} = -i\overline{z}$；

(c) $\overline{(2+i)^2} = 3 - 4i$；　　(d) $|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}\,|2z+5|$．

2. 画出由给定条件决定的点集的草图．

(a) $\mathrm{Re}(\overline{z} - i) = 2$；　　(b) $|2\overline{z} - i| = 4$．

3. 验证第 5 节关于共轭的性质(3)和(4)．

4. 利用第 5 节关于共轭的性质(4)验证

(a) $\overline{z_1z_2z_3} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}$；　　(b) $\overline{z^4} = \overline{z}^4$．

5. 验证第 5 节关于模的性质(9)．

6. 利用第 5 节的结果，当 z_2 和 z_3 是非零复数时，证明：

(a) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2z_3}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\,\overline{z_3}}$；　　(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$．

7. 利用已建立的模的性质证明：当 $|z_3| \neq |z_4|$ 时，有

$$\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leqslant \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}.$$

[13]

8. 证明：当 $|z| \leqslant 1$ 时，有

$$|\mathrm{Re}(2+\overline{z}+z^3)| \leqslant 4.$$

9. 在第 3 节已证明：如果 $z_1z_2 = 0$，则数 z_1 和 z_2 中至少有一个是零．根据实数的相应的结果和第 5 节恒等式(8)，对这一结果给出另一个证明．

10. 通过把 $z^4 - 4z^2 + 3$ 分解成两个二次因子和利用第 4 节不等式(8)，证明：如果 z 位于圆周 $|z| = 2$ 上，则

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

11. 证明：

(a) z 是一个实数的充要条件是 $\overline{z} = z$；

(b) z 是一个实数或者是一个纯虚数的充要条件是 $\overline{z}^2 = z^2$．

12. 根据数学归纳法，证明当 $n=2, 3, \cdots$ 时，

(a) $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}$；　　(b) $\overline{z_1 z_2\cdots z_n}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}\cdots\overline{z_n}$.

13. 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n(n\geqslant 1)$ 是实数，z 是任一复数，利用练习 12 的结果，证明

$$\overline{a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_n z^n}=a_0+a_1\bar{z}+a_2\bar{z}^2+\cdots+a_n\bar{z}^n.$$

14. 证明中心在 z_0 半径为 R 的圆的方程 $|z-z_0|=R$ 可以写成

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z_0})+|z_0|^2=R^2.$$

15. 利用第 5 节关于 $\mathrm{Re}\,z$ 和 $\mathrm{Im}\,z$ 的表达式(6)，证明双曲线 $x^2-y^2=1$ 可以写成

$$z^2+\bar{z}^2=2.$$

16. 按以下步骤推导三角不等式(第 4 节)，给出一个代数证明

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

(a)证明

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}})+z_2\overline{z_2}.$$

(b)指出为什么

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant 2|z_1||z_2|.$$

(c)利用(a)和(b)的结果得到不等式

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2,$$

且注意如何导出三角不等式.　　14

6 指数形式

设 r 和 θ 是与一个非零复数 $z=x+iy$ 对应的点 (x, y) 的极坐标，由于 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$，数 z 可写成极坐标形式

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{1}$$

如果 $z=0$ 坐标 θ 是无定义的；因此当讨论 $\arg z$ 时，总认为 $z\neq 0$.

在复分析中，实数 r 不容许为负数，它是径向量 z 的长度，即 $r=|z|$. 实数 θ 表示度量径向量的角度，即当 z 看作径向量(图 6)时，z 与正实轴的夹角. 在计算中，θ 有无穷多个可能的值，包括负值，它们相差 2π 的整数倍. 这些值可由方程 $\tan\theta=y/x$ 决定，其中包含对应点 z 的象限必须指定. θ 的每一个这样的值称为 z 的**幅角**，所有这样的值的集合表示为 $\arg z$. $\arg z$ 的**主值**用 $\mathrm{Arg}\,z$ 表示，它是满足 $-\pi<\Theta\leqslant\pi$ 的唯一的值 Θ. 注意

$$\arg z=\mathrm{Arg}\,z+2n\pi\quad(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{2}$$

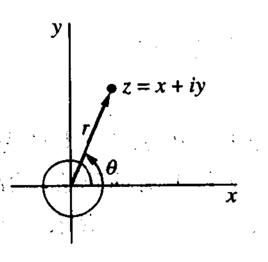


图 6

当 z 是一个负实数时，$\mathrm{Arg}\,z$ 有值 π，而不是 $-\pi$.

例 1 在第三象限的复数 $-1-i$ 有主值 $-3\pi/4$. 即

$$\mathrm{Arg}(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}.$$

由于 Θ 的主值的限制 $-\pi<\Theta\leqslant\pi$，必须强调的是 $\mathrm{Arg}(-1-i)=\frac{5\pi}{4}$ 是不成立的.

根据方程(2)

15

$$\arg(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

注意方程右边的项可以用它的任一指定的值代替，例如可以写

$$\arg(-1-i)=\frac{5\pi}{4}+2n\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

符号 $e^{i\theta}$ 或 $\exp(i\theta)$ 通过欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{3}$$

来定义，其中 θ 是径向量与正实轴的夹角. 它可使我们把极坐标形式(1)用指数形式写成更紧凑的形式

$$z=re^{i\theta}. \tag{4}$$

符号 $e^{i\theta}$ 的选取将在后面的第 28 节得到完全的启发. 然而，它在第 7 节中的应用表明这种选择是自然而合理的.

例 2 在例 1 的复数 $-1-i$ 有指数形式

$$-1-i=\sqrt{2}\exp\left[i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]. \tag{5}$$

约定 $e^{-i\theta}=e^{i(-\theta)}$，这也可写成 $-1-i=\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$. 表达式(5)当然是 $-1-i$ 的指数形式的无穷个可能的数之一：

$$-1-i=\sqrt{2}\exp\left[i\left(-\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)\right] \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{6}$$

注意到表达式(4)中 $r=1$ 告诉我们数 $e^{i\theta}$ 位于中心在原点半径为 1 的圆周上，如图 7 所示. $e^{i\theta}$ 的值不用参照欧拉公式，可直接从图中得出.

例如，如下在几何上是显然的，

$$e^{i\pi}=-1,\quad e^{-i\pi/2}=-i,\quad e^{-i4\pi}=1.$$

注意到方程

$$z=Re^{i\theta} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{7}$$

是中心在原点，半径为 R 的圆周 $|z|=R$ 的参数表示. 当参变量 θ 从 $\theta=0$ 增加到 $\theta=2\pi$ 时，点 z 从正实轴开始，沿着圆周逆时针方向转动一周. 更一般地，中心在 z_0 点，半径为 R 的圆周 $|z-z_0|=R$ 有参数表示

$$z=z_0+Re^{i\theta} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{8}$$

这可以从向量图中看出(图 8)，注意当点 z 沿着圆周 $|z-z_0|=R$ 逆时针方向环绕一周时，对应于固定向量 z_0 与一个长为 R 倾斜角 θ 从 0 到 2π 变化的向量的和.

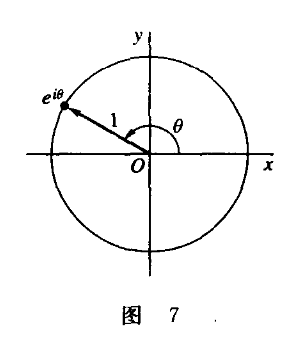


图　7

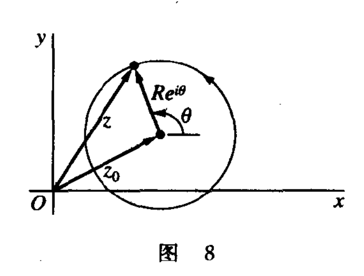


图　8

7　指数形式的乘积与商

简单的三角函数知识告诉我们，正如微积分中的指数函数一样，$e^{i\theta}$具有加法性质：

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

于是，如果 $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ 和 $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$，乘积 z_1z_2 有指数形式

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1}$$

16～17

此外

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2}e^{-i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i0}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{2}$$

因为 $1 = 1e^{i0}$，从表达式(2)得到任意一个非零复数 $z = re^{i\theta}$ 的逆是

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \tag{3}$$

通过对实数和 e^x 应用通常的代数规则，表达式(1)、(2)和(3)当然容易记住.

表达式(1)产生关于幅角的一个重要恒等式为：

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{4}$$

它可解释成如果这三个(多值)幅角中的两个值被确定，则存在第三个幅角使得方程成立.

设 θ_1 和 θ_2 分别表示 $\arg z_1$ 和 $\arg z_2$ 中的一个值，我们来验证说明(4). 表达式(1)则告诉我们 $\theta_1+\theta_2$ 是 $\arg(z_1z_2)$ 中的一个值(参看图 9). 另一方面，如果 $\arg(z_1z_2)$ 和 $\arg z_1$ 的值被指定，则这些值对应于表达式

$$\arg(z_1z_2) = (\theta_1+\theta_2) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

和

$$\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \quad (n_1 = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

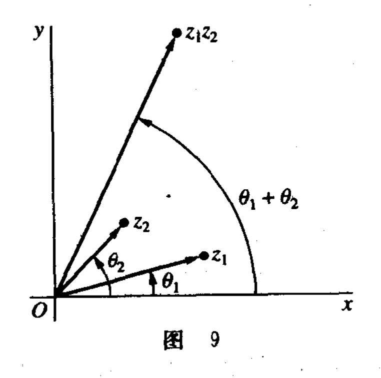


图　9

中特别指定的 n 和 n_1. 由于

18

$$(\theta_1+\theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n-n_1)\pi],$$

当值

$$\arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi$$

被选好后，则方程(4)成立. 当 $\arg(z_1 z_2)$和 $\arg z_2$ 的值被指定后，由对称性也可验证(4).

当 arg 用 Arg 代替时，有时等式(4)也是成立的(参看练习 7). 但下列例子说明一般不是这样.

例 1 当 $z_1 = -1$ 和 $z_2 = i$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{但} \quad \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

然而，如果我们取 $\arg z_1$ 和 $\arg z_2$ 为已取的值且选取 $\arg(z_1 z_2)$的值为

$$\text{Arg}(z_1 z_2) + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2},$$

则我们发现等式(4)是成立的.

等式(4)告诉我们

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1 z_2^{-1}) = \arg z_1 + \arg(z_2^{-1}),$$

且可从表达式(3)看出

$$\arg(z_2^{-1}) = -\arg z_2. \tag{5}$$

因此

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{6}$$

等式(5)当然可以解释成左边的值的集合等于右边的值的集合. 然后，如同等式(4)，等式(6)用同样的方法可以解释左边的值的集合等于右边的值的集合.

例 2 当

$$z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$$

时，注意到

$$\arg z = \arg(-2) - \arg(1 + \sqrt{3}i),$$

[19] 找出 Arg z 的主值.

因为

$$\text{Arg}(-2) = \pi \quad \text{和} \quad \text{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3},$$

$\arg z$ 的值之一是 $2\pi/3$，且因为 $2\pi/3$ 在 $-\pi$ 和 π 之间，我们发现 Arg $z = 2\pi/3$.

对 $z = re^{i\theta}$形式地应用实数规则，可得到另一个重要的结果

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{7}$$

对整数 n 用数学归纳法容易验证. 具体地说，首先注意到当 $n = 1$ 时它为 $z = re^{i\theta}$. 下一步，假

设当 $n=m$ 时，它是成立的，其中 m 是任一正整数．根据指数形式的两个非零复数的乘法表达式(1)，对 $n=m+1$：

$$z^{m+1}=zz^m=re^{i\theta}r^m e^{im\theta}=r^{m+1}e^{i(m+1)\theta}.$$

它是成立的．表达式(7)于是对任何正整数 n 成立．如果约定 $z^0=1$，则它对 $n=0$ 也是成立的．另一方面，如果 $n=-1,-2,\cdots$，用 z 的逆相乘，并令

$$z^n=(z^{-1})^m,\text{其中 } m=-n=1,2,\cdots$$

那么，由于表达式(7)对正整数幂成立，由 z^{-1} 的指数形式(3)得到

$$z^n=\left[\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}\right]^m=\left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)}=\left(\frac{1}{r}\right)^{-n}e^{i(-n)(-\theta)}=r^n e^{in\theta}\quad(n=-1,-2,\cdots).$$

表达式(7)于是对所有整数幂成立．

注意当 $r=1$ 时，表达式(7)变成

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{8}$$

当写成如下形式时

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),\tag{9}$$

这称为棣莫弗公式．

甚至当复数是用直角坐标给出且所希望的形式也用直角坐标给出时，表达式(7)对找出复数的幂也是有用的． [20]

例 3　为了把$(\sqrt{3}+i)^7$ 写成直角坐标形式，只需要

$$(\sqrt{3}+i)^7=(2e^{i\pi/6})^7=2^7e^{i7\pi/6}=(2^6e^{i\pi})(2e^{i\pi/6})=-64(\sqrt{3}+i).$$

练习

1. 当

(a) $z=\dfrac{i}{-2-2i}$；　　(b) $z=(\sqrt{3}-i)^6$

时，找出主值 Arg z.

答案：(a) $-3\pi/4$；(b) π.

2. 证明(a) $|e^{i\theta}|=1$；(b) $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

3. 运用数学归纳法证明

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\cdots e^{i\theta_n}=e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\quad(n=2,3,\cdots).$$

4. 运用模 $|e^{i\theta}-1|$ 是点 $e^{i\theta}$ 和点 1 之间的距离这一事实(参看第 4 节)，找出满足方程 $|e^{i\theta}-1|=2$ 的在区间 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的值 θ 并给出一个几何证明.

答案：π

5. 运用棣莫弗公式(参看第 7 节)导出下列三角恒等式：

(a) $\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$；　　(b) $\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$.

6. 通过把左边的单个因子写成指数形式，做必要的运算，最后回到直角坐标，证明

(a)$i(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)=2(1+\sqrt{3}i)$；　　(b)$5i/(2+i)=1+2i$；

(c)$(-1+i)^7=-8(1+i)$；　　(d)$(1+\sqrt{3}i)^{-10}=2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$.

7. 证明如果 $\mathrm{Re}\ z_1>0$ 且 $\mathrm{Re}\ z_2>0$ 则

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\ z_1+\mathrm{Arg}\ z_2,$$

其中 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$表示 $\arg(z_1z_2)$的主值，其他符号也如此表示.

8. 设 z 是一个非零复数且 n 是一个负整数($n=-1,-2,\cdots$). 又令 $z=re^{i\theta}$ 且 $m=-n=1,2,\cdots$. 用表达式

$$z^m=r^me^{im\theta}\quad 和\quad z^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)e^{i(-\theta)},$$

验证$(z^m)^{-1}=(z^{-1})^m$，因此在第 7 节的定义 $z^n=(z^{-1})^m$ 可以用另一种方式写成 $z^n=(z^m)^{-1}$.

9. 证明两个非零复数 z_1 和 z_2 有相同模的充要条件是存在复数 c_1 和 c_2 使得 $z_1=c_1c_2$ 且 $z_2=c_1\overline{c_2}$.

提示：注意

21

$$\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\exp\left(i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)=\exp(i\theta_1)$$

和[参看练习 2(b)]

$$\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\overline{\exp\left(i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}=\exp(i\theta_2)$$

10. 建立恒等式

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\quad(z\neq 1)$$

并用它导出拉格朗日三角恒等式

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)}\quad(0<\theta<2\pi).$$

提示：对第一个恒等式，写 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$ 且考虑差 $S-zS$. 为了导出第二个恒等式，在第一个恒等式中令 $z=e^{i\theta}$.

11. (a)运用二项式公式(参看第 3 节)和棣莫弗公式(参看第 7 节)导出下列等式：

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k\quad(n=1,2,\cdots).$$

然后通过方程

$$m=\begin{cases}n/2,\text{如果 } n \text{ 为偶数}\\(n-1)/2,\text{如果 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

定义整数 m 且用上面的和得到表达式[与练习 5(a)比较]

$$\cos n\theta=\sum_{k=1}^{m}\binom{n}{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}\theta\ \sin^{2k}\theta\quad(n=1,2,\cdots).$$

(b)令 $x=\cos\theta$ 且假设 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，在这种情况下 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 指出怎样从(a)的最后结果得到函数族

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

的每一个是次数为 n 的变量为 x 的多项式(注：这些多项式称为切比谢夫多项式且在逼近论中很著名).

8 复数的根

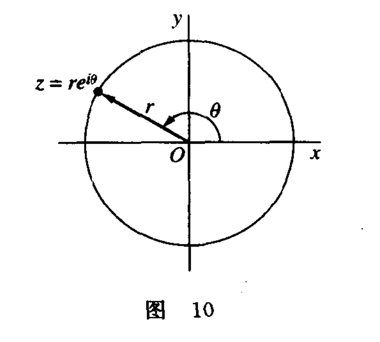


图 10

现在考虑以原点为圆心，半径为 r 的圆周上的点 $z=re^{i\theta}$ (图 10). 当 θ 增加时，点 z 沿着圆周逆时针方向运动. 特别地，当 θ 增加 2π 时，点 z 回到原来的点；同样当 θ 递减 2π 时，点 z 回到原来的点. 因此，从图 10 很明显地有：两个非零复数

$$z_1=r_1e^{i\theta_1}\quad 且\quad z_2=r_2e^{i\theta_2}$$

相等的充要条件是

$$r_1=r_2\quad 且\quad \theta_1=\theta_2+2k\pi,$$

其中 k 是某个整数($k=0$，±1，±2，…).

22

与第 7 节中复数 $z=re^{i\theta}$ 的整数幂的表达式 $z^n=r^ne^{in\theta}$ 一起，这个条件对找出任意一个非零复数 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ 的 n 次方根是非常有用的，其中 $n=2$，3，…. 复数 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ 的 n 次方根是满足 $z^n=z_0$ 的一个非零数 $z=re^{i\theta}$ 或

$$r^ne^{in\theta}=r_0e^{i\theta_0}.$$

根据上面楷体字的说明，有

$$r^n=r_0\quad 且\quad n\theta=\theta_0+2k\pi,$$

其中 k 是任一整数($k=0$，±1，±2，…). 因此 $r=\sqrt[n]{r_0}$，其中根号表示正实数 r_0 的唯一的正 n 次根，以及

$$\theta=\frac{\theta_0+2k\pi}{n}=\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

结果，复数

$$z=\sqrt[n]{r_0}\exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

是 z_0 的 n 次根. 从根的这一指数形式我们可直接看到这些根全在以原点为圆心、半径为 $\sqrt[n]{r_0}$ 的圆周 $|z|=\sqrt[n]{r_0}$ 上，且从 θ_0/n 开始等弧度分布，每个弧度间隔为 $2\pi/n$. 显然当 $k=0$，1，2，…，$n-1$ 时，得到所有的不相同的根且对其他的 k 值不再产生新的根. 设 c_k($k=0$，1，2，…，$n-1$)表示这些不同的根，且记

23

$$c_k=\sqrt[n]{r_0}\exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).\tag{1}$$

(参看图 11).

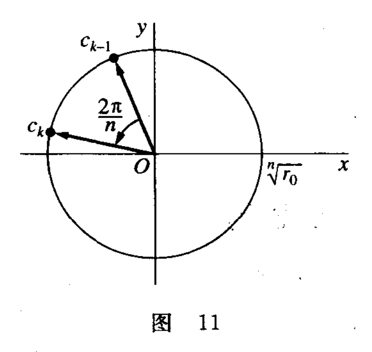


图 11

数$\sqrt[n]{r_0}$表示这个根的每个径向量的长度，第一个根 c_0 有幅角 θ_0/n；且当 $n=2$ 时，这两个根位于圆周 $|z|=\sqrt[n]{r_0}$某一直径的两个相反的端点上，第二个根是$-c_0$. 当 $n\geqslant 3$ 时，所有的根位于某一圆内接正 n 多边形的顶点上.

我们将用 $z_0^{1/n}$ 表示 z_0 的 n 个根的集合. 特别地，如果 z_0 是一个正实数，符号 $r_0^{1/n}$ 表示根的全体；在表达式(1)中的符号$\sqrt[n]{r_0}$只用作正根. 当用在表达式(1)中的 θ_0 的值是 $\arg z_0$ $(-\pi<\theta_0\leqslant\pi)$的主值时，数 c_0 被称为主值根. 于是当 z_0 是正实数 r_0 时，它的主值根是$\sqrt[n]{r_0}$.

最后记住表达式(1)的一个形式方法是把 z_0 用最一般的指数形式(与第 6 节例 2 比较)表示

$$z_0 = r_0 e^{i(\theta_0+2k\pi)} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2}$$

形式地应用关于实数的分数次幂的法则，并记住恰好有 n 个根：

$$z_0^{1/n} = \left[r_0 e^{i(\theta_0+2k\pi)}\right]^{1/n} = \sqrt[n]{r_0}\exp\left[\frac{i(\theta_0+2k\pi)}{n}\right]$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

24 在下一节中，这些例子将用来说明找复数根的方法.

9 举例

在这里的每个例子中，先用第 8 节表达式(2)，然后继续用那一节最后描述的方法.

例 1 为了决定 1 的 n 次方根，写

$$1 = 1\exp[i(0+2k\pi)] \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

然后发现

$$1^{1/n} = \sqrt[n]{1}\exp\left[i\left(\frac{0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1). \tag{1}$$

当 $n=2$ 时，根当然是±1，当 $n\geqslant 3$ 时，所有的根位于圆 $|z|=1$ 内接正 n 多边形的顶点上，其中一个顶点对应主值 $z=1(k=0)$.

如果令

$$\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right), \tag{2}$$

则从第 7 节 $e^{i\theta}$的性质(8)得到

$$\omega_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

因此不同的 n 次根恰好是

$$1,\omega_n,\omega_n^2,\cdots,\omega_n^{n-1}.$$

参看图 12，其中 $n=3$，4 和 6 的情形已画出. 最后注意 $\omega_n^n=1$. 值得注意的是：如果 c 是非零复数 z_0 的任一个特指的根，则所有的 n 次根的集合可写成

$$c, c\omega_n, c\omega_n^2, \cdots, c\omega_n^{n-1}.$$

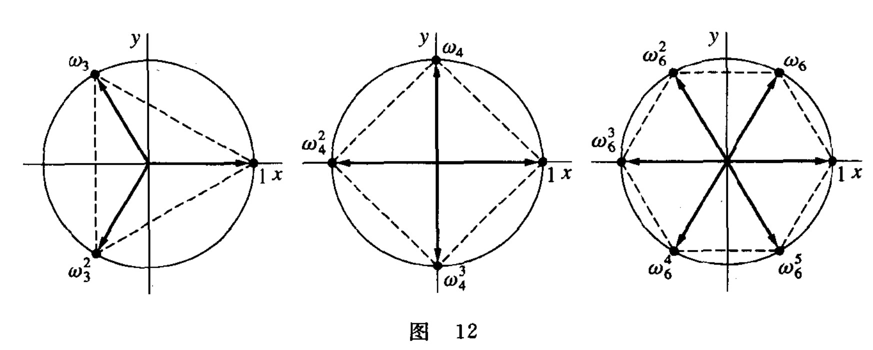


图　12

这是因为任一非零复数乘以 ω_n 其幅角增加 $2\pi/n$，而它的模不变.

例 2　找出 $(-8i)^{1/3}$ 的所有的值，或 $-8i$ 的立方根. 只需要令

$$-8i = 8\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right] \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

则看到所需要的根是

$$c_k = 2\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k=0,1,2). \tag{3}$$

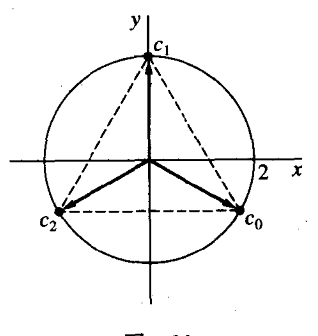


图　13

它们位于圆 $|z|=2$ 内接正三边形的顶点上，且等弧度地分布，每个弧度间隔为 $2\pi/3$，从主值(参看图 13)

$$c_0 = 2\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-i.$$

开始. 不用进一步计算，可知 $c_1=2i$，且因为 c_2 关于虚轴与 c_0 是对称的，有 $c_2=-\sqrt{3}-i$. 这些根当然可写成

$$c_0, c_0\omega_3, c_0\omega_3^2, \text{其中 } \omega_3 = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right).$$

(参看例 1 后面的注).

例 3　$(\sqrt{3}+i)^{1/2}$ 的两个值 $c_k(k=0,1)$，即 $(\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{2}}$ 的平方根，可通过写

$$\sqrt{3}+i = 2\exp\left[i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right] \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

找出且(参看图 14)

$$c_k = \sqrt{2}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)\right] \quad (k=0,1). \tag{4}$$

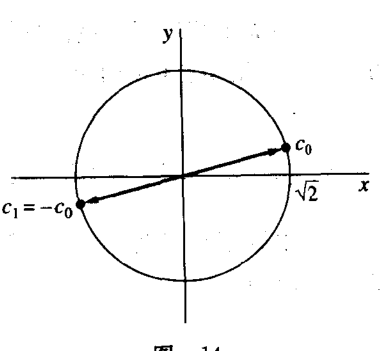


图　14

25
~
26

欧拉公式(第 6 节)说明

$$c_0=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

且三角恒等式

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2},\quad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{5}$$

使我们可以写

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4},$$

27

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

其结果是

$$c_0=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),$$

由于 $c_1=-c_0$，$\sqrt{3}+i$ 的两个平方根最后是

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right).$$

练习

1. 找出(a)$2i$；(b)$1-\sqrt{3}i$ 的平方根且把它们用直角坐标表示.

答案：(a)$\pm(1+i)$；(b)$\pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$.

2. 在如下情况下，找出它们的根且把它们用直角坐标表示，把它们表示成某些正多边形的顶点，且指出它们的主值根：

(a)$(-16)^{1/4}$； (b)$(-8-8\sqrt{3}i)^{1/4}$.

答案：(a)$\pm\sqrt{2}(1+i)$，$\pm\sqrt{2}(1-i)$；(b)$\pm(\sqrt{3}-i)$，$\pm(1+\sqrt{3}i)$.

3. 在如下情况下，找出它们的根且把它们用直角坐标表示，把它们表示成某些正多边形的顶点，且指出它们的主值根：

(a)$(-1)^{1/3}$； (b)$(8)^{1/6}$.

答案：(b)$\pm\sqrt{2}$，$\pm\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$，$\pm\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$.

4. 根据第 9 节例 1，一个非零复数 z_0 的三个立方根可写成 c_0，$c_0\omega_3$，$c_0\omega_3^2$，其中 c_0 是 z_0 的主立方根且

$$\omega_3=\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

证明如果 $z_0=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$，则 $c_0=\sqrt{2}(1+i)$，把它们用直角坐标表示，其他的立方根是

$$c_0\omega_3=\frac{-(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{\sqrt{2}},\quad c_0\omega_3^2=\frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)i}{\sqrt{2}}.$$

5. (a)设 a 表示任一固定的实数，证明 $a+i$ 的两个平方根是

$$\pm\sqrt{A}\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right),$$

其中 $A=\sqrt{a^2+1}$ 且 $\alpha=\mathrm{Arg}(a+i)$.

28

(b)借助第 9 节例 3 的三角恒等式(5)，证明在(a)中得到的平方根可以写成

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}).$$

[注意当 $a=\sqrt{3}$ 时，这就是第 9 节例 3 的最后结果.]

6. 找出方程 z^4+4 的四个根并用它们把 z^4+4 分解成两个实二次多项式的乘积.

答案：$(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$.

7. 证明如果 c 是除 1 以外 1 的 n 次根，则

$$1+c+c^2+\cdots+c^{n-1}=0.$$

提示：利用第 7 节练习 10 中的第一个恒等式.

8. (a)当系数 a、b 和 c 是复数时，推导通常的解二次多项式

$$az^2+bz+c=0\quad(a\neq 0)$$

的公式. 特别地，通过在方程左边完全平方，导出解二次多项式的公式

$$z=\frac{-b+(b^2-4ac)^{1/2}}{2a},$$

其中当 $b^2-4ac\neq 0$ 时，两个平方根都要考虑，

(b)利用(a)中的结果找出方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根.

答案：(b) $\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{i}{\sqrt{2}}$，$\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{i}{\sqrt{2}}$.

9. 设 $z=re^{i\theta}$ 是任一非零复数且 n 是一个负整数($n=-1,-2,\cdots$). 当 $m=-n$ 时，通过方程 $z^{1/n}=(z^{-1})^{1/m}$ 定义 $z^{1/n}$. 通过验证 $(z^{1/m})^{-1}$ 和 $(z^{-1})^{1/m}$ 的值是相同的，证明 $z^{1/n}=(z^{1/m})^{-1}$ (比较第 7 节练习 8).

10　复平面中的区域

在这一节中，我们考虑复数或 z 平面的集合和它们相互之间的紧密联系. 我们的基本工具是给定点 z_0 的 ε 邻域的概念

$$|z-z_0|<\varepsilon. \tag{1}$$

它由包含在圆心为 z_0、半径为特定正数 ε 的圆内但不在圆周上的点组成(参看图 15). 当在讨论中，ε 的值不言而喻或不重要时，集合(1)常常称为一个邻域. 有时，称如下集合为一个 ε 的去

29

心邻域

$$0<|z-z_0|<\varepsilon. \tag{2}$$

它由 z_0 的 ε 邻域内除 z_0 点本身之外的点组成.

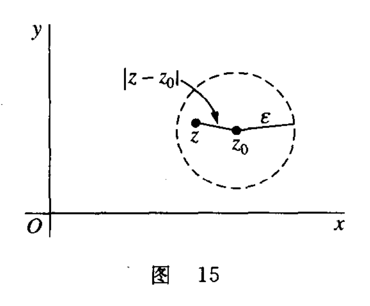


图 15

如果存在点 z_0 的一个邻域全包含在 S 中，点 z_0 称为集合 S 的内点；如果存在点 z_0 的一个邻域不含有 S 中的点，点 z_0 称为集合 S 的外点. 一个点 z_0，如果既不是 S 的内点也不是 S 的外点则称为 S 的边界点. 一个边界点因此是这样的点，在这个点的每一个邻域既含有 S 中的点也含有不是 S 中的点. 所有 S 的边界点称为 S 的边界. 例如，圆周 $|z|=1$ 是集合

$$|z|<1 \quad 和 \quad |z|\leqslant 1. \tag{3}$$

中每一个的边界. 一个集合如果不包含有它的边界点，则称为开集. 一个集合是开集的充要条件是其中每一点是它自己的内点，关于它的证明将留下作为练习. 一个集合如果包含它自己的所有边界点则称为闭集；一个集合 S 的闭包是由集合 S 和集合 S 的边界点组成，一个集合 S 的闭包是闭集. 注意(3)中集合的第一个是开集，第二个是闭集.

某些集合可能既不是开集，也不是闭集. 一个集合如果不是开集，则此集合必定含有边界点；一个集合如果不是闭集，则一定存在一个边界点不在此集合中. 注意去心圆盘 $0<|z|\leqslant 1$ 既不是开集，也不是闭集. 另一方面，所有复数的集合既是开集，也是闭集，因为此集合没有边界点.

如果一个开集 S 中任何两点 z_1 和 z_2 可以用全在此集合的、由有限条线段首尾顺次连接组成的折线相连，则称集合 S 是连通的. 开集 $|z|<1$ 是连通的，圆环 $1<|z|<2$ 当然是开集，它也是连通的(参看图 16). 一个连通的开集称为区域. 注意任何邻域是区域. 一个集合如果是一个区域加上某些、或不加上、或加上全部的边界点组成的集合，称为带边区域.

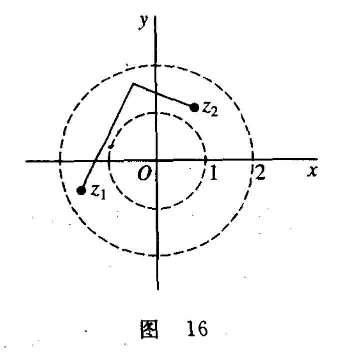


图 16

如果 S 中的每一点都在某一固定的圆周 $|z|=R$ 内，称它为有界的；否则称它为无界的. 集合(3)中每一个集合都是有界的，半平面 $\mathrm{Re}\, z\geqslant 0$ 是无界的.

如果一个点 z_0 的每一个去心邻域至少含有集合 S 中一个的点，点 z_0 称为 S 的聚点. 因此，如果一个集合 S 是闭的，则它包含它的每一个聚点. 因为如果聚点 z_0 不是在 S 中，它将会是 S 的边界点；但这与闭集包含它的边界点矛盾. 练习中将要求证明其逆，事实上，其逆也是正确的. 于是，一个集合是闭的充要条件是此集合包含它的所有的边界点.

显然，当存在 z_0 的一个去心邻域不含 S 中的点时，此点不是集合 S 的聚点. 注意原点是集合 $z_n=i/n(n=1, 2, \cdots)$ 的唯一聚点.

练习

1. 画出下列集合的草图并且说明哪些是区域：

(a) $|z-2+i|\leqslant 1$；　(b) $|2z+3|>4$；

(c) $\operatorname{Im} z>1$；　(d) $\operatorname{Im} z=1$；

(e) $0\leqslant \arg z\leqslant \pi/4 (z\neq 0)$；　(f) $|z-4|\geqslant |z|$.

答案：(b)、(c)是区域.

2. 在练习 1 中的集合哪些既不是开集，也不是闭集？

答案：(e).

3. 在练习 1 中的集合哪些集合是有界的？

答案：(a).

4. 画出下列集合的闭包：

(a) $-\pi<\arg z<\pi (z\neq 0)$；　(b) $|\operatorname{Re} z|<|z|$；

(c) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\leqslant\frac{1}{2}$；　(d) $\operatorname{Re}(z^2)>0$.

30～31

5. 设 S 是所有满足 $|z|<1$ 或 $|z-2|<1$ 的点 z 组成的集合. 说明 S 为什么不是连通的.

6. 证明一个集合 S 是开集的充要条件是 S 中每一点都是内点.

7. 求出下列集合的聚点：

(a) $z_n=i^n (n=1, 2, \cdots)$；　(b) $z_n=i^n/n (n=1, 2, \cdots)$；

(c) $0\leqslant \arg z<\pi/2 (z\neq 0)$；　(d) $z_n=(-1)^n(1+i)\frac{n-1}{n}\quad (n=1, 2, \cdots)$.

答案：(a)没有；(b)0；(d)$\pm(1+i)$.

8. 证明一个集合如果包含它的每一个聚点，则必定是闭集.

9. 证明一个区域的任一点 z_0 是这个区域的聚点.

10. 证明有限点集 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 不能有聚点.

32

第2章　解析函数

在本章中，我们将考虑单变量的复变函数并为之建立一种微分理论．本章的主要目的是介绍解析函数，解析函数在复分析中起着重要作用．

11　单复变量的函数

设 S 是一个复数集合．定义在 S 上的函数是一个法则，它将 S 中每一个 z 对应一个复数 w．复数 w 被称为 f 在 z 的值，记为 $f(z)$；即 $w=f(z)$．集合 S 被称为是 f 的定义域[⊖]．

必须指出，要使一个函数有意义，定义域和法则都不可缺少．当未给出函数定义域时，则认为是函数存在有意义的最大集合．然而，有时候用记号来区别一个已给的函数和它的取值并不是很方便．

例 1　如果 f 由方程 $w=1/z$ 在集合 $z\neq 0$ 上所定义，它仅指函数 $w=1/z$，或者是简单地记为函数 $1/z$．

假如 $w=u+iv$ 是函数 f 在 $z=x+iy$ 的取值，那么

$$u+iv=f(x+iy).$$

每一个实数 u 和 v 取决于实变量 x 和 y，由此可以表达成一对以 x 和 y 为变量的实值函数：

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \tag{1}$$

如果用极坐标 r 和 θ 来代替 y 和 x，那么有

$$u+iv=f(re^{i\theta}),$$

其中 $w=u+iv$ 和 $z=re^{i\theta}$．在这种情况下，我们可以表示为

$$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta). \tag{2}$$

例 2　如果 $f(z)=z^2$，那么

$$f(x+iy)=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy.$$

因此

$$u(x,y)=x^2-y^2 \quad 和 \quad v(x,y)=2xy.$$

如果使用极坐标，我们有

$$f(re^{i\theta})=(re^{i\theta})^2=r^2e^{i2\theta}=r^2\cos 2\theta+ir^2\sin 2\theta,$$

因此

$$u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta,\quad v(r,\theta)=r^2\sin 2\theta.$$

如果在方程(1)和(2)的任一情况下，函数 v 取值恒为零，那么 f 恒取实数值，称 f 是一个复变量的实值函数．

例 3　下面我们介绍一个在本章中将用于阐明一些重要概念的函数

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2+i0$$

⊖ 虽然定义域有时是如同第 10 节的区域，但定义域一般不是区域．

如果 n 是零或者是一个不为零的正整数，a_0，a_1，a_2，…，a_n 是复常数，且 a_n 不为零，那么函数

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

被称为是一个 n 次多项式．注意这里的求和是有限个项，并且定义域为整个 z 平面．多项式的商 $P(z)/Q(z)$ 称为有理函数，它们的定义域为使每一个 $Q(z)$ 不为零的点．多项式和有理函数构成单复变函数的一个重要的基本类型．

34

一般的函数概念的推广指的是如下法则：它将定义域中的 z 映为多个值，我们称这样的法则为单复变多值函数，与实变函数中的多值函数相对应．在研究多值函数的时候，我们往往取定其中的一个分支，这样便可以得到一个与之相对应的单值函数．

例 4 令 z 为任意的非零复数，由第 8 节我们知道 $z^{1/2}$ 有两个值

$$z^{1/2}=\pm\sqrt{r}\exp(i\Theta/2),$$

这里 $r=|z|$ 并且 $\Theta(-\pi<\Theta\leqslant\pi)$ 取幅角的主值 $\arg z$．但是如果我们仅选择 $\pm\sqrt{r}$ 的正号并记

$$f(z)=\sqrt{r}\exp(i\Theta/2),(r>0,-\pi<\Theta\leqslant\pi), \tag{3}$$

则函数(3)便在 z 平面上对不为零的数有定义．由于零是它自身唯一的平方根，我们可以令 $f(0)=0$，这样，函数 f 便在整个复平面都有定义．

练习

1. 给出下列函数的定义域

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$； (b) $f(z)=\mathrm{Arg}(1/z)$；

(c) $f(z)=\dfrac{z}{z+\bar{z}}$； (d) $f(z)=\dfrac{1}{1-|z|^2}$.

答案：(a) $z\neq\pm i$；(c) $\mathrm{Re}\,z\neq0$.

2. 把函数 $f(z)=z^3+z+1$ 表示为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的形式．

答案：$(x^3-3xy^2+x+1)+i(3x^2y-y^3+y)$.

3. 设 $f(z)=x^2-y^2-2y+i(2x-2xy)$．其中 $z=x+iy$，使用第 5 节中的记号

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad 和 \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

把 $f(z)$ 用 z 表示出来，并化简．

答案：$\bar{z}^2+2iz$.

4. 把函数

35

$$f(z)=z+1/z \quad (z\neq0)$$

用 $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ 的形式表示出来．

答案：$(r+1/r)\cos\theta+i(r-1/r)\sin\theta$.

12 映射

实变量的实函数的性质往往可以通过它们的图形表现出来，但是当 $w=f(z)$，其中 w 和 z

是复变量的时候，就不容易找到这样方便的图形来表示函数，这是因为 z 和 w 在一个平面上而不是在一条直线上．即便如此，我们也可以通过表示相应的点 $z=(x, y)$ 和 $w=(u, v)$ 来展示函数的某些性质．这样做时，一般分别在 z 平面和 w 平面画出它们．

当我们用这样的方式去考虑一个函数时，通常把它视为映射或变换．点 z 在定义域 S 上的像是点 $w=f(z)$，所有包含于 S 内的 T 中点的像的集合称为 T 的像集．整个定义域 S 的像称为 f 的值域．一个点 w 的逆像指的是在定义域中以 w 为像的点 z 的集合，一个点的逆像可以是单个点，多个点，或者是空集．当一个点的逆像是空集时，理所当然地，它就不在 $f(z)$ 的值域中．

诸如平移、旋转、反射这样的概念将被用于表达映射的几何特征，在这样的情况下，有时把平面 z 和平面 w 等同是很方便的，例如对于映射

$$w = z + 1 = (x+1) + iy,$$

这里可以被认为是 $z=x+iy$ 向右平移一个单位．因为 $i=e^{\frac{i\pi}{2}}$，所以映射

$$w = iz = r\exp[i(\theta+\pi/2)]$$

把每一个非零的 z 的向量半径绕原点按逆时针方向旋转一个直角，这里 $z=re^{i\theta}$；映射

$$w = \bar{z} = x - iy$$

把每一个 $z=x+iy$ 以实轴为轴做反射．

通常我们可以通过描述像曲线或是区域来获得更多的关于映射的信息，这样往往比简单的表示单个的点更有力．在如下的例子中，我们将通过对 $w=z^2$ 的研究来说明这一点．

我们开始寻找一些在 z 平面中曲线的像． 36

例 1 根据第11节的例 2，映射 $w=z^2$ 可以被视为是如下的变换：

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \tag{1}$$

映射从 xy 平面到 uv 平面，这种形式对于找到双曲线的像是非常有用的．

比如很容易验证，双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1 \quad (c_1 > 0) \tag{2}$$

的每一支是以一对一的方式映射到垂直直线 $u=c_1$ 上，我们注意到当 (x, y) 是在两个分支中某一个分支上时，从方程(1)得到 $u=c_1$．特别是当 (x, y) 在双曲线的右半平面的分支上时，由(1)的第一个等式，我们有 $v=2y\sqrt{y^2+c_1}$，因此右分支的图像可以用参数坐标表示为

$$u = c_1, \quad v = 2y\sqrt{y^2+c_1} \quad (-\infty < y < \infty),$$

显然当点 (x, y) 沿着双曲线的分支向上移动时，这个点 (x, y) 的像点也以向上的方向沿整个直线移动(如图 17)．

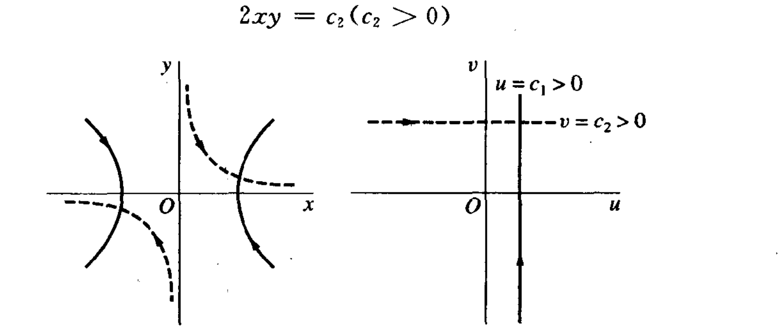
类似地，由于 $w=z^2$ 方程对

$$u = c_1, \quad v = -2y\sqrt{y^2+c_1} \quad (-\infty < y < \infty)$$

表示的是位于左半平面的双曲线的图形的参数表示，当点 (x, y) 沿着左半平面的双曲线向下移动时，可以看出像点是沿着直线 $u=c_1$ 向上移动的．

从另一方面来说，双曲线

$$2xy = c_2(c_2 > 0) \tag{3}$$



37

图 17　$w=z^2$

的每一个分支正如图 17 所示，都被映为直线 $v=c_2$. 为了证明这一点，我们注意到从(1)的第二个方程得到：当(x, y)在每一分支上时，有 $v=c_2$. 如果它在第一象限的分支上，那么由 $y=\frac{c_2}{2x}$，方程(1)的第一个等式揭示了这一分支有如下的参数表示

$$u = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2}, \quad v = c_2 \quad (0 < x < \infty)$$

注意到

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} u = \infty.$$

由于 u 连续地依赖 x，很清楚当(x, y)沿着双曲线(3)的上面一支向下运动时，它的像沿着整个水平直线 $v=c_2$ 向右运动. 由于双曲线(3)的下面的一个分支有参数表示

$$u = \frac{c_2^2}{4y^2} - y^2, \quad v = c_2 \quad (-\infty < y < 0)$$

并且由于

$$\lim_{y\to-\infty} u = -\infty \quad 且 \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} u = \infty$$

可以知道当点(x, y)沿着双曲线(3)在下半平面一支由下向上运动时，它的像沿着整个水平直线 $v=c_2$ 向右运动(如图 17 所示).

下面我们用例 1 来找出一些区域的像：

例 2　区域 $x>0$，$y>0$，$xy<1$ 是由满足 $2xy=c$ 的上半双曲线上的点组成，其中$(0<c<2)$(如图 18)，由例 1 我们知道当一个点沿这些分支当中的一个向下移动，那么它的像就在映射 $w=z^2$ 的作用下沿线 $v=c$ 向右移动. 因为当 c 取值在 0 和 2 之间时，这些分支盖满了区域 $x>0$，$y>0$，$xy<1$，整个区域被映为水平带形区域 $0<v<2$.

由方程(1)，可见，平面 z 上的点$(0, y)$的像为$(-y^2, 0)$，因此当$(0, y)$沿 y 轴向下向原点移动，它的像沿负的 u 轴向右移动并在 w 平面达到原点. 那么，既然点$(x, 0)$的像是$(x^2, 0)$，当$(x, 0)$沿 x 轴从原点向右移动，它的像也沿 u 轴自原点向右移动. 双曲线 $xy=1$

在上半平面分支理所当然地就是水平直线 $v=2$，那么很明显地，闭区域 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$xy\leqslant 1$ 被映为闭带形 $0\leqslant v\leqslant 2$，如图 18 所示.

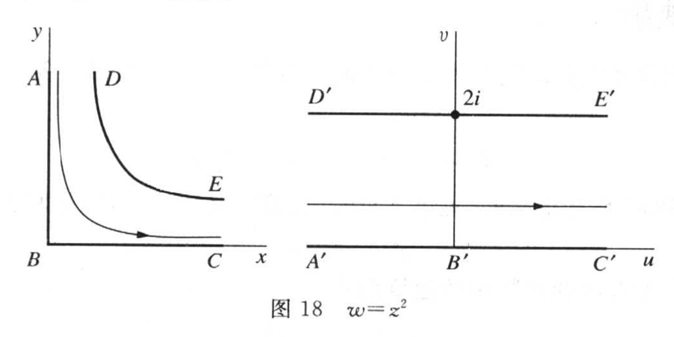


图 18　$w=z^2$

我们将要看到极坐标在分析映射的时候是多么的有用.

例 3　用极坐标表示，那么 $w=z^2$ 可以写为

$$w=r^2e^{i2\theta}$$

其中 $z=re^{i\theta}$. 因此如果 $w=\rho e^{i\phi}$，我们有 $\rho e^{i\phi}=r^2e^{i2\theta}$ 并且第 8 节开始部分的楷体文字告诉我们

$$\rho=r^2,\quad \phi=2\theta+2k\pi$$

这里 k 取值为 $k=0$，± 1，± 2，…，很明显要找到每一个非零的 z 的像，只要把 z 的模平方，再把它的幅角 $\arg z$ 变为两倍即可.

可以观察到圆周 $r=r_0$ 上的点 $z=r_0e^{i\theta}$ 被映为圆周 $\rho=r_0^2$ 上的点 $w=r_0^2e^{i2\theta}$. 因为第一个圆周上的点以逆时针的方向从正实轴向正虚轴移动(如图 19 所示)，它的像的图形在第二个圆周上以逆时针的方向从正实轴向负实轴移动(参看图 19). 因此当 r_0 取遍所有正实数，相应的 z 和 w 平面上的弧就可以分别盖满第一象限和上半平面. 映射 $w=z^2$ 在平面的第一象限 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 是一一对应的，并将其映为平面 w 的上半平面 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，如图 19 所示. 点 $z=0$ 自然地就被映为点 $w=0$.

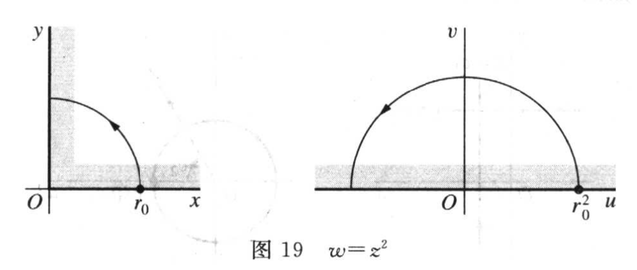


图 19　$w=z^2$

38
~
39

映射 $w=z^2$ 也将上半平面 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 映为整个 w 平面. 然而在这种情况下它不是一一对应的，这是由于 z 平面上的正实轴和负实轴都被映为了 w 平面上的正实轴.

当 n 是一个大于 2 的整数的时候，映射 $w=z^n$(即 $\rho e^{i\phi}=r^ne^{in\theta}$)的各种性质都和 $w=z^2$ 的性质相似. 这样的一个映射把 z 平面映为 w 平面，且 w 平面上的每一个非零点都是 z 平面上 n 个不同点的像. 圆周 $r=r_0$ 被映为圆周 $\rho=r_0^n$；扇形 $r\leqslant r_0$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{n}$ 被映为圆盘 $\rho\leqslant r_0^n$，且不是一一对

应的.

13 指数函数映射

在第 3 章里我们将介绍和研究不是多项式的一些初等函数的性质，第 3 章将以下面的指数函数开始：

$$e^z = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy) \tag{1}$$

在这里两个因子 e^x 和 e^{iy} 是有定义的(见第 6 节). 注意定义(1)式可以被写为

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

这可以从微积分中广为人知的指数函数运算公式

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$$

得到提示. 这一节的目的就是要用 e^z 向读者再提供其他一些推理比较简单的映射例子，我们从考察水平线和垂直线的像开始.

例 1 映射

$$w = e^z \tag{2}$$

可以写为 $\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$，这里 $z = x + iy$，$w = \rho e^{i\phi}$，因此 $\rho = e^x$，$\phi = y + 2n\pi$，这里，n 是某一整数(见第 8 节)；映射(2)可以表示为

$$\rho = e^x, \quad \phi = y \tag{3}$$

在竖直的直线 $x = c_1$ 上的点 $z = (c_1, y)$ 的像在 w 平面上有极坐标 $\rho = \exp c_1$，$\phi = y$，当 z 沿直线向上移动，像也沿图 20 所示的圆周逆时针方向移动. 直线的像显然就是整个圆周；圆周上的每一个点都是直线上间隔为 2π 的无数多个点的像.

40

水平的直线 $y = c_2$ 被一一地映到射线 $\phi = c_2$ 上，为了表明这一点，我们注意到点 $z = (x, c_2)$ 的像有极坐标 $\rho = e^x$，$\phi = c_2$，于是很明显：当点 z 沿整条直线从左向右移动，它的像沿整条射线 $\phi = c_2$ 向外移动(如图 20 所示).

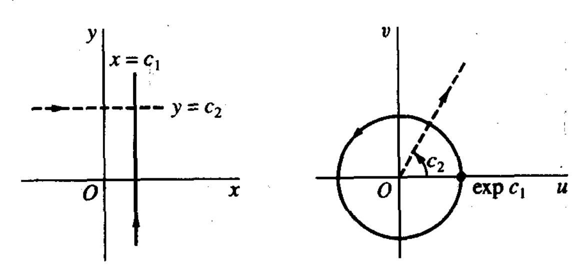
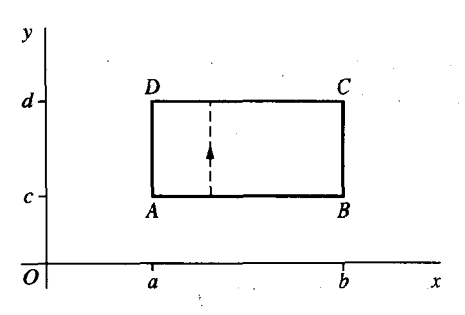


图 20 $w = \exp z$

水平和竖直的线段分别被映为射线的一部分和圆弧；通过观察例 1 很容易就可以得到各种区域的像，这就是下面的例子将要表明的.

例 2 我们将要表明映射 $w = e^z$ 将长方形区域 $a \leqslant x \leqslant b$，$c \leqslant y \leqslant d$ 映为区域 $e^a \leqslant \rho \leqslant e^b$，$c \leqslant \phi \leqslant d$，这两个区域相应的部分和它们的边界可见图 21. 竖直线上的线段 AD 被映到圆

弧 $\rho=e^a$，$c\leqslant\phi\leqslant d$，记为 $A'D'$. 在 AD 右侧连接水平边界的线段 BC 的像是更大的圆弧；显然，线段 BC 的像是圆弧 $\rho=e^b$，$c\leqslant\phi\leqslant d$，记为 $B'C'$. 当 $d-c<2\pi$ 时，映射是一一的，特别是如果 $c=0$，$d=\pi$，那么 $0\leqslant\phi\leqslant\pi$；并且长方形区域被映为半圆环(如附录 B 图 8 所示).



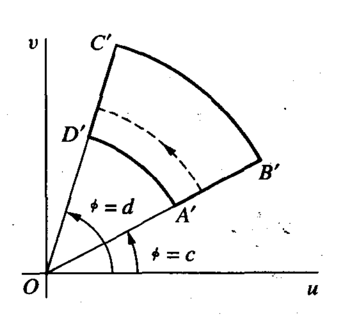


图 21　$w=\exp z$

在这里我们用水平线的像去找出水平带形的像.

例 3　当 $w=e^z$ 时，无限带形 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 的像为 w 平面的上半平面 $v\geqslant 0$(如图 22)，这一点可以通过回忆例 1 中水平直线 $y=c$ 映为从原点出发的射线 $\phi=c$ 而得到. 当实数 c 从 $c=0$ 增加到 $c=\pi$，y 的截线从 0 增加到 π，相应射线的倾斜角从 $\phi=0$ 增加到 $\phi=\pi$. 这个映射正如附录 B 图 6 所示，其两个区域对应边界上的点都已标明.

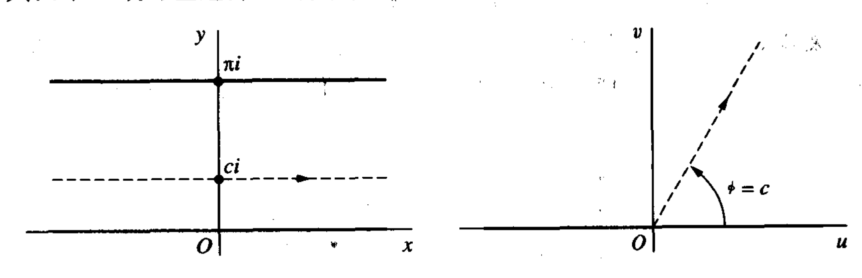


图 22　$w=\exp z$

练习

1. 参照 12 节的例 1，找出 z 平面上在映射 $w=z^2$ 下其像区域为正方形，其边界由直线 $u=1$，$u=2$，$v=1$，$v=2$ 所围成的区域(见附录 B 图 2).

2. 找出并且画图说明：在映射 $w=z^2$ 下，双曲线

$$x^2-y^2=c_1(c_1<0) \quad 且 \quad 2xy=c_2(c_2<0)$$

的像以及相应的方向.

3. 作图表示扇形 $r\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 在以下映射下所成的区域：

(a) $w=z^2$；　　(b) $w=z^3$；　　(c) $w=z^4$.

4. 证明直线 $ay=x(a\neq 0)$ 在映射 $w=\exp z$ 下的像为螺旋线 $\rho=\exp(a\phi)$，其中 $w=\rho\exp(i\phi)$.

5. 通过考虑水平线段的像，证明在映射 $w=\exp z$ 下长方形区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$ 的像为 $e^a\leqslant\rho\leqslant e^b$，$c\leqslant\phi\leqslant d$（正如 13 节图 21 中所示）.

6. 证明在映射 $w=\exp z$ 下附录 B 图 7 所示的边界和区域的对应关系成立.

7. 找出半带形 $x\geqslant 0$，$0\leqslant y\leqslant\pi$ 在映射 $w=\exp z$ 下的像，并且表示出相应的边界对应.

42

8. 对于函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的另外一种解释是可以将其视为在函数 f 的定义域上的向量场，函数把每一有定义的 z 映为向量 w，其分量为 $u(x,y)$，$v(x,y)$. 把下列向量场用图表示出来：(a)$w=iz$；(b)$w=\dfrac{z}{|z|}$.

14 极限

设 f 在 z_0 的去心邻域内有定义（见第 10 节），当 z 趋近于 z_0 时 $f(z)$ 的极限为 w_0，或是

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0,\tag{1}$$

指的是 $w=f(z)$ 可以任意接近 w_0，只要我们选的点 z 足够地接近 z_0 而不等于它. 下面我们将给出极限的严格并且便于应用的定义.

(1)式表明对每一个正实数 ε，存在一个正实数 δ，使得

$$\text{当 } 0<|z-z_0|<\delta \text{ 时，}\quad \text{有 } |f(z)-w_0|<\varepsilon.\tag{2}$$

从几何意义上来说，这个定义指的是：w_0 的每一个 ε 邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$，都有 z_0 的一个 δ 去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$，使得其中的每一个 z 的像 w 位于 w_0 的 ε 邻域中（如图 23 所示）.

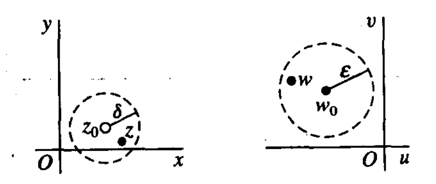


图 23

注意：即使我们要考虑去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 的所有的点，也并不要求它们的像要填满整个邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$. 例如：如果 $f(z)$ 为常数 w_0，那么 z 的像总是整个邻域的中心点.

注意：一旦 δ 被找到，那么它还可以由更小的正实数代替，比如说 $\delta/2$.

容易证明：当一个函数 $f(z)$ 在一点 z_0 存在极限值，那么极限是唯一的. 为了证明这一点，我们设

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0,\quad \lim_{z\to z_0}f(z)=w_1.$$

那么对于任意的正实数 ε，存在正实数 δ_0 和 δ_1，使得

43

$$\text{当 } 0<|z-z_0|<\delta_0 \text{ 时，}\quad \text{有 } |f(z)-w_0|<\varepsilon,$$

并且

$$当\ 0<|z-z_0|<\delta_1\ 时，\quad 有\ |f(z)-w_1|<\varepsilon,$$

因此如果 $0<|z-z_0|<\delta$，其中 δ 为 δ_0 和 δ_1 当中较小的一个，那么我们有

$$|w_1-w_0|=|[f(z)-w_0]-[f(z)-w_1]|\leqslant|f(z)-w_0|+|f(z)-w_1|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

但是 $|w_1-w_0|$ 是非零的常数，ε 可以选得任意小，所以

$$w_1-w_0=0.$$

定义(2)要求 f 定义在 z_0 的去心邻域内，当 z_0 是 $f(z)$ 的定义域内的一个内点时，这样的去心邻域当然总是存在的. 我们可以通过如下的方式来把极限的定义拓宽到当 z_0 是边界点的时候：只要让不等式(2)中的 z 同时在区域内且在去心邻域内.

例 1 我们将要证明如果 $f(z)=\frac{iz}{2}$ 在开圆 $|z|<1$ 内，那么

$$\lim_{z\to 1}f(z)=\frac{i}{2}, \tag{3}$$

点 1 位于 f 的定义域的边界上. 观察到当在区域 $|z|<1$ 时

$$\left|f(z)-\frac{i}{2}\right|=\left|\frac{iz}{2}-\frac{i}{2}\right|=\frac{|z-1|}{2}.$$

因此对于这样的 z 和任意的正实数 ε(如图 24)，

$$当\ 0<|z-1|<2\varepsilon\ 时,有\left|f(z)-\frac{i}{2}\right|<\varepsilon.$$

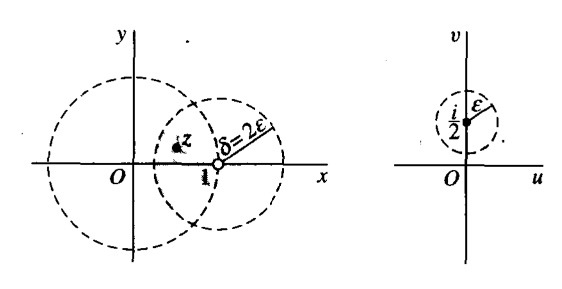


图 24

44

因此当 δ 是等于或者小于 2ε 的正实数时，在 $0<|z|<1$ 中的任意点都满足条件(2).

如果 z_0 是 f 的定义域的内点，极限(1)存在，不等式(2)中第二个应该对去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内的所有点 z 都成立. 所以符号 $z\to z_0$ 表示 z 允许以任意的方式趋近于 z_0，而不是以一特定的方向，下面的例子将要强调这一点.

例 2 如果

$$f(z)=\frac{z}{\bar{z}}, \tag{4}$$

则极限

$$\lim_{z\to z_0}f(z) \tag{5}$$

不存在，如果它存在的话，可以使点 $z=(x, y)$ 以任意的方式趋于原点而极限值是唯一的，但是当 $z=(x, 0)$ 是实数轴上的非零点(见图 25)

$$f(z)=\frac{x+i0}{x-i0}=1;$$

且当 $z=(0, y)$ 是虚轴上的非零点

$$f(z)=\frac{0+iy}{0-iy}=-1.$$

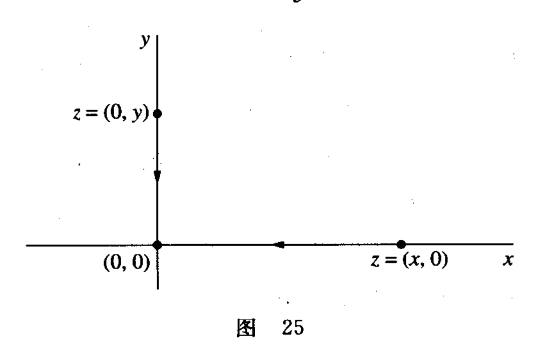


图 25

于是，让 z 沿实数轴趋于原点，我们就发现极限值为 1；另一方面，z 沿虚轴趋于原点，极限值为 -1. 但是由于极限是唯一的，因此(5)的极限是不存在的.

45

定义(2)给出了一种判断所给的点 w_0 是否是极限的方法，但是并未给出求极限的方法. 下一节里所给的极限定理将使我们能够求得更多的极限.

15 极限定理

我们可以通过建立单复变函数的极限和二元变量的实函数极限之间的联系，来探索极限的求法. 而在微积分中，求实函数的极限我们是熟悉的，我们可以轻松地运用它们的定义和性质.

定理 1 设

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \quad z_0=x_0+iy_0, \quad w_0=u_0+iv_0.$$

那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \tag{1}$$

当且仅当

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \quad 且 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0. \tag{2}$$

为证明定理，我们首先设(2)成立，由此得到(1)中的极限. 由(2)可以知道，对任意的正实数 ε，存在正实数 δ_1 和 δ_2 使得

$$当\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1\ 时，\quad 有\ |u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

并且

$$\text{当 } 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_2 \text{ 时，}\quad \text{有 } |v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

令 δ 为 δ_1 和 δ_2 当中最小的数，由

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|\leqslant|u-u_0|+|v-v_0|$$

和

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|(x-x_0)+i(y-y_0)|=|(x+iy)-(x_0+iy_0)|,$$

从(3)和(4)所述，

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

46

成立，只需

$$0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta.$$

这就是说，(1)中的极限存在.

现在我们假使(1)中的极限存在，由此，对于每一个正实数 ε，存在一个正实数 δ，使得

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)|<\varepsilon \tag{5}$$

成立，只需

$$0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta. \tag{6}$$

但是

$$|u-u_0|\leqslant|(u-u_0)+i(v-v_0)|=|(u+iv)-(u_0+iv_0)|,$$
$$|v-v_0|\leqslant|(u-u_0)+i(v-v_0)|=|(u+iv)-(u_0+iv_0)|,$$

并且

$$|(x+iy)-(x_0+iy_0)|=|(x-x_0)+i(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

因此由不等式(5)和(6)，可知

$$|u-u_0|<\varepsilon,\quad |v-v_0|<\varepsilon$$

成立，只需

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

这样就得到了极限(2). 证毕.

定理 2 设

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0,\quad \text{且}\quad \lim_{z\to z_0}F(z)=W_0 \tag{7}$$

那么

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+F(z)]=w_0+W_0, \tag{8}$$
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)F(z)]=w_0W_0, \tag{9}$$

并且，如果 $W_0 \neq 0$，

[47]

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{F(z)}=\frac{w_0}{W_0}. \tag{10}$$

这个重要的定理可以由单复变量函数的极限的定义直接证明，但是如果用定理1，那么由二元的实函数的极限理论，我们几乎可以直接得到这个定理.

例如为证(9)，我们写

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad F(z)=U(x,y)+iV(x,y),$$
$$z_0=x_0+iy_0,\quad w_0=u_0+iv_0,\quad W_0=U_0+iV_0,$$

那么，根据(7)的假设条件和定理1，当(x, y)趋于(x_0, y_0)时，相应的函数 u、v、U 和 V 的极限存在并且分别为 u_0、v_0、U_0 和 V_0. 所以乘积

$$f(z)F(z)=(uU-vV)+i(vU+uV).$$

当(x, y)趋于(x_0, y_0)时，其极限的实部和虚部分量分别为 $u_0U_0-v_0V_0$ 和 $v_0U_0+u_0V_0$，因此由定理1，当 z 趋于 z_0 的时候；$f(z)F(z)$有极限

$$(u_0U_0-v_0V_0)+i(v_0U_0+u_0V_0)$$

且这等于 w_0W_0，这样(9)式就成立了. 相应地，我们可以证明(8)和(10).

由14节的极限定义(2)容易看出

$$\lim_{z\to z_0}c=c \quad 且 \quad \lim_{z\to z_0}z=z_0,$$

这里 z 和 c 是任意的复数；并且由性质(9)和数学归纳法，可知

$$\lim_{z\to z_0}z^n=z_0^n \quad (n=1,2,\cdots).$$

所以，通过观察(8)和(9)，多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,$$

当 z 趋于 z_0 时的极限是多项式在该点的取值

$$\lim_{z\to z_0}P(z)=P(z_0). \tag{11}$$

16 涉及到无穷远点的极限

把无穷远点∞归入复平面，并且使用与之有关的极限，在很多时候是很方便的. 这样的平面被称为*扩充复平面*. 要观察无穷远点，可以把复平面想像为以原点 $z=0$ 为中心的球面沿赤道的投影(如图26). 平面上的每个点 z 对应球面上的一个点 P，点 P 由通过点 z 和北极的直线与球面的交所确定. 我们以同样的方式可以知道除北极点外球面上的每一点 P 都对应平面上的一点 z. 让球面上的北极点 N 对应无穷远点，这样我们就可使扩充的复平面和球面上的点之间建立一一的对应关系. 这样的球面被称为*黎曼球面*，对应部分则被称为*球极投影*.

[48]

可以看到复平面上以原点为中心的单位圆的外部与上半球面除去赤道和北极点的部分相对应，并且，对每一个正实数 ϵ，在复平面上的圆周 $|z|=\dfrac{1}{\epsilon}$ 外的点对应于离北极点很近的点，

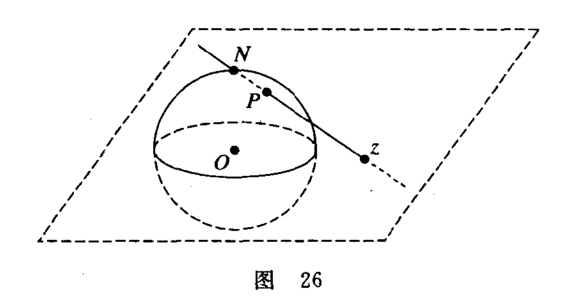


图 26

因此我们把集合 $|z|>\frac{1}{\varepsilon}$ 叫作∞的一个 ε 邻域.

我们这样约定：当说一个点 z，我们指的是有限的平面. 并且今后在本书中，当考虑的是无穷远点时，我们都将会特别地指明.

现在可以很容易地给出下述式子的含义：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$

其中 z_0 或者 w_0 取∞，或者是它们都取∞. 在 14 节当中，我们只要简单地把 z_0 和 w_0 的适当的邻域用点∞代替. 下面的定理表明了这一点.

定理 如果 z_0 和 w_0 分别是 z 和 w 平面上的点，那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0 \tag{1}$$

并且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{z\to 0} f(1/z)=w_0. \tag{2}$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{z\to 0}\frac{1}{f(1/z)}=0. \tag{3}$$

49

我们以如下的方式证明：首先注意在(1)中的极限意味着对于每一个正实数 ε，存在一个正实数 δ，使得

$$\text{当 } 0<|z-z_0|<\delta \text{ 时，} \quad \text{有 } |f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}, \tag{4}$$

这就是说，当点 z 位于 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，点 $w=f(z)$ 位于∞的邻域 $|w|>\frac{1}{\varepsilon}$. 因为(4)可以被写成

$$\text{当 } 0<|z-z_0|<\delta \text{ 时，} \quad \text{有 } \left|\frac{1}{f(z)}-0\right|<\varepsilon,$$

由此便可以得到(1)中的第二个极限.

(2)中的第一个极限意味着，对于每一个正实数 ε，存在一个正实数 δ，使得

$$\text{当 } |z|>\frac{1}{\delta} \text{ 时，} \quad \text{有 } |f(z)-w_0|<\varepsilon. \tag{5}$$

如果以 $1/z$ 代替 z，就可以得到以下的结果

$$\text{当 } 0<|z-0|<\delta \text{ 时，} \quad \text{有 } |f(1/z)-w_0|<\varepsilon,$$

最后，(3)的第一个极限可以被解释为：对于每一个正实数 ε，存在一个正实数 δ，使得

$$\text{当 } |z|>\frac{1}{\delta} \text{ 时，} \quad \text{有 } |f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}. \tag{6}$$

如果以 $1/z$ 代替 z，就可以得到以下的结果

$$\text{当 } 0<|z-0|<\delta \text{ 时，} \quad \text{有} \left|\frac{1}{f(1/z)}-0\right|<\varepsilon;$$

这就给出了(3)的第二个极限.

例 观察

$$\text{由于} \lim_{z\to -1}\frac{z+1}{iz+3}=0 \quad \text{有} \quad \lim_{z\to -1}\frac{iz+3}{z+1}=\infty,$$

[50]

$$\text{由于} \lim_{z\to 0}\frac{(2/z)+i}{(1/z)+1}=\lim_{z\to 0}\frac{2+iz}{1+z}=2 \quad \text{有} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{2z+i}{z+1}=2.$$

更进一步

$$\text{由于} \lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{1}{z^2}+1}{\dfrac{2}{z^3}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{z+z^3}{2-z^3}=0 \quad \text{有} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{2z^3-1}{z^2+1}=\infty.$$

17 连续性

一个函数 f 称为在点 z_0 是连续的，如果下面所有的条件都满足：

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \text{ 存在，} \tag{1}$$

$$f(z_0) \text{ 存在，} \tag{2}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0). \tag{3}$$

可以看到实际上(3)包含了(1)和(2)的结论，因为等式两边的量的存在性是隐含在其中的. (3)式表明：对每一个正实数 ε，存在一个正实数 δ，使得

$$\text{当 } |z-z_0|<\delta \text{ 时，} \quad \text{有 } |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon. \tag{4}$$

一个单变量的复变函数称为在区域 R 上是连续的，如果它在这个区域 R 上每一点都连续.

如果两个函数都在某一点连续，那么它们的和与积也在该点连续；当被除的函数在该点不为零，那么它们的商也在该点连续. 这些结论可以由 15 节的定理 2 直接得到. 注意：由 15 节的极限(11)可以得到这样的结论：多项式在整个平面上是连续的.

我们给出连续函数的两个所期望的性质，它们的证明不是很容易的. 我们的证明建立在(4)的基础之上，下面我们给出定理和证明过程.

定理 1 *两个连续函数的复合仍然是连续的.*

这个定理的更精确的表述包含在下面的证明过程当中. 设 $w=f(z)$ 为一个在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<\delta$ 有定义的函数，令 $W=g(w)$ 为定义域包含 f 的像(见 12 节)的函数. 那么复合函

数 $W=g[f(z)]$就对所有的位于 $|z-z_0|<\delta$ 内的点有定义. 现在假使 f 在点 z_0 连续，g 在 w 平面中的点 $f(z_0)$连续，则根据 g 在 $f(z_0)$的连续性，对于每一正实数 ε，存在一个正实数 γ，使得

$$\text{当 } |f(z)-f(z_0)|<\gamma \text{ 时，} \quad \text{有 } |g[f(z)]-g[f(z_0)]|<\varepsilon.$$

51

(见图 27)但是 f 在点 z_0 的连续性保证了邻域 $|z-z_0|<\delta$ 可以选得足够小使得第一个不等式成立，这样我们就得到了 $g[f(z)]$的连续性.

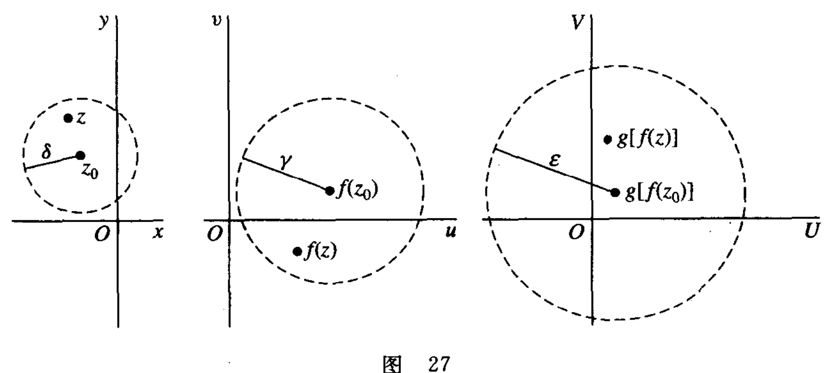


图 27

定理 2 *如果 f 在点 z_0 连续并且不为零，那么在该点的某个邻域有 $f(z)\neq 0$.*

假使 f 在点 z_0 连续并且不为零，我们可以通过以正实数 $\dfrac{|f(z_0)|}{2}$ 代替(4)当中 ε 的来证明. 这告诉我们存在一个正实数 δ 使得

$$\text{当 } |z-z_0|<\delta \text{ 时，} \quad \text{有 } |f(z)-f(z_0)|<\frac{|f(z_0)|}{2}.$$

因此如果有一个点 z 位于邻域 $|z-z_0|<\delta$ 内并且使得 $f(z)=0$，我们就得到矛盾

$$|f(z_0)|<\frac{|f(z_0)|}{2}.$$

这样我们就得到定理的证明.

下面的函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{5}$$

的连续性依赖于其分量 $u(x, y)$和 $v(x, y)$的连续性. 注意：例如由第 15 节的定理 1，(5)式的函数在点(x_0, y_0)连续当且仅当它的每一分量都在该点连续. 为表明这个论述的作用，假设(5)中的函数在有界闭区域 R 中是连续的(见第 10 节)，那么函数

52

$$\sqrt{[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2}$$

在 R 中是连续的，因此在该区域的某个点达到最大值[⊖]. 这就是说，f 在 R 上有界且 $|f(z)|$

⊖ 例如，参看 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed., pp. 125-126 and p. 529, 1983.

在 R 上达到最大值．更准确地说，存在一个正实数 M，使得

$$\text{对任意的 } z \in R, \quad \text{有 } |f(z)| \leqslant M. \tag{6}$$

这里等式至少对一个 z 成立．

练习

1．用 14 节的极限定义(2)来证明

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$；　(b) $\lim\limits_{z \to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$；　(c) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$.

2．用 14 节的极限定义(2)来证明(其中 a，b，c 为复常数)

(a) $\lim\limits_{z \to z_0}(az+b) = az_0+b$；　(b) $\lim\limits_{z \to z_0}(z^2+c) = z_0^{\,2}+c$；

(c) $\lim\limits_{z \to 1-i}[x+i(2x+y)] = 1+i \quad (z=x+iy)$.

3．令 n 为正整数，$P(z)$、$Q(z)$为多项式且 $Q(z_0)\neq 0$，用 15 节定理 2 以及其中出现的极限来求下述极限：

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{z^n}(z_0 \neq 0)$；　(b) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{iz^3-1}{z+i}$；　(c) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

答案：(a) $\dfrac{1}{z_0^{\,n}}$；(b)0；(c) $\dfrac{P(z_0)}{Q(z_0)}$.

4．用数学归纳法和 15 节当中的极限性质(9)证明

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n,$$

这里 n 为正整数($n=1，2，\cdots$).

5．证明当 z 趋于 0 时，下面函数的极限是不存在的：

$$f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$$

可以通过如下的方式证明：让非零的点 $z=(x，0)$和 $z=(x，x)$分别趋向原点．(注意：如同 14 节的例 2，仅考虑 $z=(x，0)$和 $z=(0，y)$是不够的．)

53

6．用下面的方法，证明 15 节定理 2 中的(8)，

(a)15 节定理 1 当中二元实函数的极限的性质；

(b)14 节当中极限的定义(2).

7．用 14 节当中极限的定义(2)证明

$$\text{如果} \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{则} \quad \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|.$$

提示：观察第 4 节的不等式(8)可以写为

$$\big||f(z)| - |w_0|\big| \leqslant |f(z) - w_0|.$$

8．通过 $\Delta z = z - z_0$ 这样的方式证明

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \text{ 的充要条件是} \lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

9．证明：如果存在正数 M 使得 $|g(z)| \leqslant M$ 在 z_0 的一个邻域内成立，且 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$，

那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

10. 用 16 节的定理证明

(a) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4z^2}{(z-1)^2}=4$；　(b) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{(z-1)^3}=\infty$；　(c) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z-1}=\infty$.

11. 用 16 节的定理证明当

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0),$$

时，有

(a)如果 $c=0$ 则 $\lim\limits_{z\to\infty} T(z)=\infty$；

(b)如果 $c\neq 0$ 则 $\lim\limits_{z\to\infty} T(z)=a/c$ 且 $\lim\limits_{z\to -d/c} T(z)=\infty$.

12. 说明为什么无穷远点处的极限是唯一的.

13. 证明集合 S 是无界的(见第 10 节)当且仅当无穷远点的每一邻域都至少含 S 中的一个点.

18 导数

令 f 为定义域包含点 z_0 的一个邻域的函数，那么 f 在点 z_0 的导数，记为 $f'(z)$，由下面的等式定义

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{1}$$

(假定这个极限是存在的). 如果 f 在点 z_0 的导数存在，则称为它在该点是可微的. 54

通过对定义(1)里面的变量 z 用新的复变量

$$\Delta z = z - z_0$$

来表示，我们可以将定义写为

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{2}$$

注意：因为 f 是在 z_0 的整个邻域有定义的，所以当 $|\Delta z|$ 充分小的时候，$f(z_0+\Delta z)$ 总是有定义的(如图 28).

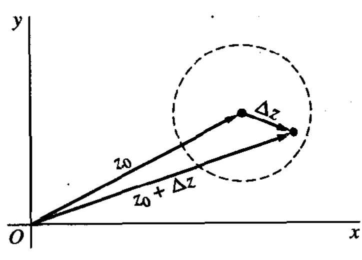


图 28

当考虑(2)中的导数的定义，我们经常把关于的 z_0 记号舍弃而使用下面的记号

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$$

这个记号表明 f 在某个点的值随自变量的变化而变化. 那么，如果我们用$\dfrac{dw}{dz}$记 $f'(z)$，方程(2)就变为

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{3}$$

例 1 设 $f(z)=z^2$，在任意点 z

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z) = 2z$$

既然 $2z+\Delta z$ 是关于 Δz 的多项式，就有$\dfrac{dw}{dz}=2z$，或者 $f'(z)=2z$.

例 2 下面考虑函数 $f(z)=|z|^2$，这里

55

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

如果$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$的极限存在，那么我们可以让点 $\Delta z=(\Delta x, \Delta y)$以任意的方式趋向于原点来求得极限. 特别是，当 Δz 在实轴上通过点$(\Delta x, 0)$水平地趋向于原点(见图 29)，

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i0} = \Delta x - i0 = \Delta x + i0 = \Delta z$$

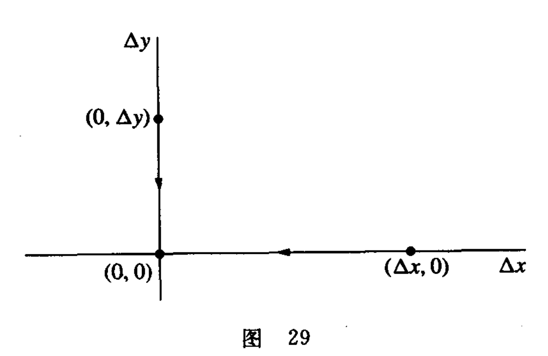


图 29

在这样的情况下

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z$$

因此，如果$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$的极限存在，它的值必为 $\bar{z}+z$. 然而，当 Δz 沿虚轴通过点$(0, \Delta y)$竖直地趋向原点，则

$$\overline{\Delta z} = \overline{0+i\Delta y} = -(0+i\Delta y) = -\Delta z$$

我们就可以得到

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\bar{z}+\overline{\Delta z}-z$$

因此，如果极限存在，必为 $\bar{z}-z$. 因为极限是唯一的(见 14 节)，可得

$$\bar{z}+z=\bar{z}-z$$

即 $z=0$，如果$\frac{dw}{dz}$存在的话.

下面我们证明在 $z=0$，$\frac{dw}{dz}$存在，实际上，我们可以观察到当 $z=0$ 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}$变为$\overline{\Delta z}$，由此可知当且仅当 $z=0$，$\frac{dw}{dz}$存在且为 0.

例 2 表明一个函数可以在某个点可导，但是在这个点的任意邻域都不可导. 因为 $f(z)=|z|^2$ 的实部和虚部分别为

$$u(x,y)=x^2+y^2 \quad 和 \quad v(x,y)=0 \tag{4}$$

56

所以，这个例子也表明：即使一个函数在某个点有任意阶的连续的偏导数，它也未必在该点可导.

函数 $f(z)=|z|^2$ 在复平面上每一点都是连续的，因为它的(4)中的每一个分量都是连续的. 所以函数的连续性不可以保证其可导性，但是*如果函数在某个点是可导的，那么它在该点一定是连续的*，为了表明这一点，我们设 $f'(z)$存在并且写为如下的形式

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)]=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\lim_{z\to z_0}(z-z_0)=f'(z_0)\cdot 0=0$$

由此可以得到

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).$$

这就是 f 在 z_0 的连续的定义(见 17 节).

复变函数的导数的几何意义比实函数复杂，我们将把它放到第 9 章.

19 微分公式

18 节中导数的定义和实函数导数的定义是相类似的，实际上，下面所给出的基本的微分公式都可以用微积分的方法得到，在这些公式当中 f 在 z 的导数记号为$\frac{d}{dz}f(z)$或者 $f'(z)$，我们可以根据需要随意使用.

c 为复常数，f 为在点 z 存在导数的复函数，很容易证明下面的一些结论：

$$\frac{d}{dz}c=0,\quad \frac{d}{dz}z=1,\quad \frac{d}{dz}[cf(z)]=cf'(z). \tag{1}$$

并且如果 n 是一个正整数

$$\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}. \tag{2}$$

57

这个公式当 $z\neq 0$ 时对于负整数 n 也是成立的.

如果 f，F 在点 z 存在导数，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[f(z)+F(z)]=f'(z)+F'(z), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[f(z)F(z)]=f(z)F'(z)+f'(z)F(z) \tag{4}$$

并且当 $F(z)\neq 0$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right]=\frac{F(z)f'(z)-f(z)F'(z)}{[F(z)]^2}. \tag{5}$$

下面我们推导(4)式，我们先把 $f(z)F(z)$ 中的变量写为

$$\begin{aligned}\Delta w&=f(z+\Delta z)F(z+\Delta z)-f(z)F(z)\\&=f(z)[F(z+\Delta z)-F(z)]+[f(z+\Delta z)-f(z)]F(z+\Delta z).\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=f(z)\,\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}+\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}F(z+\Delta z),$$

让 Δz 趋向零，于是我们就可以得到欲证的 $f(z)F(z)$ 导数. 在这里我们使用了 $F(z)$ 在点 z_0 连续这一事实，因为当 Δz 趋向零时，$F(z+\Delta z)$ 趋向于 $F(z)$（见 17 节的练习 8).

对于复合函数，微分的链式法则也是成立的. 如果 f 在点 z_0 有导数，g 在点 $f(z_0)$ 有导数，那么函数 $F(z)=g[f(z)]$ 在点 z_0 有导数，并且

$$F'(z_0)=g'[f(z_0)]f'(z_0) \tag{6}$$

如果我们采用记号 $w=f(z)$ 和 $W=g(w)$，那么 $W=F(z)$，链式法则就成为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}w}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

例 求 $(2z^2+i)^5$ 的导数，令 $w=2z^2+i$ 和 $W=w^5$，那么

$$\frac{\mathrm{d}(2z^2+i)^5}{\mathrm{d}z}=5w^4 4z=20z(2z^2+i)^4.$$

下面我们证明公式(6). 选择一个 $f'(z_0)$ 存在的点 z_0，如果记 $w_0=f(z_0)$，同时也假设 $g'(w_0)$ 也存在，则存在 w_0 的 ε 邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$ 使得对所有的 w_0 的 ε 邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$ 中的点 w，我们可以定义 Φ 的值：$\Phi(w_0)=0$ 且

58

$$\Phi(w)=\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}-g'(w_0)\quad(\text{当 } w\neq w_0 \text{ 时}). \tag{7}$$

注意：根据导数的定义

$$\lim_{w\to w_0}\Phi(w)=0 \tag{8}$$

因此 $\Phi(w)$ 在 w_0 连续.

于是(7)可以写为下面的形式

$$g(w)-g(w_0)=[g'(w_0)+\Phi(w)](w-w_0)\quad(|w-w_0|<\varepsilon) \tag{9}$$

这个式子当 $w=w_0$ 时也是成立的. 既然 $f'(z_0)$ 存在，那么 f 在 z_0 也是连续的. 我们可以适当

地选择正实数 δ，使得如果 z 在 z_0 的 δ 邻域 $|z-z_0|<\delta$ 时，$f(z)$ 在 w_0 的 ε 邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$ 中．这样就可以在方程(9)中当 z 在 z_0 的 δ 邻域 $|z-z_0|<\delta$ 时，用 $f(z)$ 替换变量 w．在这样的代换以及 $w_0=f(z_0)$ 下，(9)式就成为

$$\frac{g[f(z)]-g[f(z_0)]}{z-z_0}=\{g'[f(z_0)]+\Phi[f(z)]\}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},\quad (0<|z-z_0|<\delta),\tag{10}$$

在这里我们限制 $z\neq z_0$，于是被除数便不为零．我们已经注意到 f 在 z_0 点连续，Φ 在 $w_0=f(z_0)$ 点连续，于是复合函数 $\Phi[f(z)]$ 在 z_0 点连续，并且既然 $\Phi(w_0)=0$，于是

$$\lim_{z\to z_0}\Phi[f(z)]=0.$$

于是当 z 趋于 z_0 时，等式(10)的极限便成为(6)．

练习

1. 用 19 节的结果来求下列函数的导数：

(a) $f(z)=3z^2-2z+4$；　(b) $f(z)=(1-4z^2)^3$；

(c) $f(z)=\dfrac{z-1}{2z+1}\left(z\neq-\dfrac{1}{2}\right)$；　(d) $f(z)=\dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}(z\neq0)$．

2. 用 19 节的结果来证明：

(a) $n(n\geqslant1)$ 次多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\quad(a_n\neq0)$$

处处可导，且导函数为：

$$P'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}.$$

(b)(a)中的多项式 $P(z)$ 的系数可以写为：

$$a_0=P(0),a_1=\frac{P'(0)}{1!},a_2=\frac{P''(0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{P^{n}(0)}{n!}.$$

3. 用 18 节的定义(3)来直接证明

$$\text{当 } f(z)=\frac{1}{z},z\neq0\text{ 时，}\quad\text{有 } f'(z)=-\frac{1}{z^2},$$

4. 设 $f(z_0)=g(z_0)=0$，且 $f'(z_0)$，$g'(z_0)$ 存在且不为零，用 18 节的导数定义(1)证明

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

5. 推证 19 节的两个函数的和的导数公式(3)．

6. 当 n 为正整数时，使用下面的方法对于函数 z^n 的导数，推证 19 节的表达式(2)：

(a) 19 节的关于两个函数的积的导数公式(4)以及数学归纳法．

(b) 18 节的函数的导数定义(3)以及二项式公式(见第 3 节)．

7. 推证 19 节的表达式(2)对于函数 z^n 的导数在 n 为负整数($n=-1,-2,\cdots$)时仍然是成立的，其中 $z\neq0$．

提示：记 $m=-n$，使用两个函数商的导数公式.

8. 用 18 节的例 2 的方法证明在任意点，下列函数的导数 $f'(z)$ 不存在.

(a) $f(z)=\bar{z}$；　　(b) $f(z)=\text{Re } z$；　　(c) $f(z)=\text{Im } z$.

9. 设 f 为取值如下的函数：

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z}, & \text{当 } z\neq 0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } z=0 \text{ 时}\end{cases}$$

证明：如果 $z=0$，那么在实轴或虚轴上的位于 Δz 平面或是 $\Delta x\Delta y$ 平面上的非零的点有 $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=1$. 然后证明以上平面上的点 $(\Delta x,\ \Delta x)$ 在直线 $\Delta y=\Delta x$ 上有 $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=-1$. 从以上的结论推证 $f'(0)$ 不存在.（注意：要证明这个结论，仅仅在 Δz 平面上以水平或是竖直方向趋近于原点是不够的.）

20 柯西-黎曼方程

在本节中，我们将得到一对方程，使得它们刚好为函数

60

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1}$$

的分量函数 u 和 v 在点 $z_0=(x_0,\ y_0)$ 的一阶偏导数，即 f 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的导数存在时应该满足的条件. 我们还要证明如何用这些偏导数来表示 f 在该点的导数 $f'(z_0)$.

我们以下面的方式开始：记 $z_0=x_0+iy_0$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 且

$$\begin{aligned}\Delta w&=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\\&=[u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

设导数存在，即

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{2}$$

从第 15 节的定理 1 我们知道

$$f'(z_0)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\text{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}+i\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\text{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{3}$$

要记得：表达式(3)在我们以任何方式让 $(\Delta x,\ \Delta y)$ 趋向于 $(0,\ 0)$ 时都是成立的. 特别是，我们让 $(\Delta x,\ \Delta y)$ 通过 $(\Delta x,\ 0)$ 水平趋向于 $(0,\ 0)$，就如图 29（见 18 节）. 当 $\Delta y=0$ 时，商 $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 就成为

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

因此

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\text{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}=u_x(x_0,y_0)$$

并且

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0,y_0)$$

在这里 $u_x(x_0, y_0)$和 $v_x(x_0, y_0)$分别代表 u 和 v 在(x_0, y_0)的一阶偏导数. 用这些表达式代入(3)就可以得到

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) \tag{4}$$

我们也可以通过点$(0, \Delta y)$让 Δz 趋向于 0，在这种情况下 $\Delta x=0$ 并且

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} - i\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}.\end{aligned}$$

61

很明显地，有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0,y_0)$$

并且

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z} = -\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0,y_0)$$

因此从表达式(3)可以得到

$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0), \tag{5}$$

这里 u 和 v 的偏导数是关于 y 的，注意：(5)还可以写为

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0)].$$

方程(4)和(5)不仅用偏导数的形式给出导数 $f'(z_0)$的表达式，而且还给出 $f'(z_0)$存在的必要条件. 因为我们只要把这两个方程的实部和虚部分别做比较，就可以看到只要 $f'(z_0)$存在，就有

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \tag{6}$$

为了纪念发现它们的法国数学家柯西(1789—1857)，以及后来对单复变函数的发展作出贡献的德国数学家黎曼(1826—1866)，人们把方程(6)称为*柯西-黎曼方程*.

我们把上面的结论归结为以下的：

定理 设

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

并且 $f'(z)$在点 $z_0=x_0+iy_0$ 存在，那么分量 u 和 v 的一阶偏导数在点 $z_0=x_0+iy_0$ 存在，且在该点满足柯西-黎曼方程：

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{7}$$

而且 $f'(z_0)$可以写为

$$f'(z_0) = u_x + iv_x, \tag{8}$$

在此一阶偏导数在点(x_0, y_0)取值.

62

例 1 在 18 节例 1 中我们证明了函数

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

在每个点都是可导的且导数为 $f'(z)=2z$. 要证明每点都满足柯西-黎曼方程，我们注意到：

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

因此

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x$$

并且，根据方程(8)：

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

因为柯西-黎曼方程是函数 f 在点 z_0 导数存在时应该满足的必要条件，所以它们可以被用于确定函数 f 导数不存在的点.

例 2 对于函数 $f(z)=|z|^2$，我们有：

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \quad v(x,y) = 0,$$

如果柯西-黎曼方程在某个点(x, y)成立，那么就有 $2x=0$ 或者 $2y=0$，或是 $x=y=0$. 因此在任何的非零点 $f'(z)$不存在，正如我们在 18 节例 2 中证明的. 注意：上面的理论并未保证 $f'(0)$的存在性. 下一节的理论将会保证这一点.

21 可微的充分条件

柯西-黎曼方程在某个点(x_0, y_0)成立，并未足以保证函数 f 在该点可导(见 22 节的练习 6). 但是，如果还有在该点的连续性，我们就可以得到下面的有用的结果：

定理 设函数

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

为定义于某个点 $z_0=x_0+iy_0$ 的 ε 邻域，并且分量 u 和 v 关于 x 和 y 一阶偏导数在点 $z_0=x_0+iy_0$ 的 ε 邻域内分别存在，如果这些一阶偏导数在点(x_0, y_0)连续且在点(x_0, y_0)满足柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

63

那么 $f'(z_0)$存在.

下面开始证明，我们先记 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，这里 $0<|\Delta z|<\varepsilon$ 并且

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

因此

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v \tag{1}$$

这里

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

以及

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

由已知一阶偏导数在点(x_0, y_0)连续，我们可以得到⊖

$$\Delta u = u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \tag{2}$$

以及

$$\Delta v = v_x(x_0,y_0)\Delta x + v_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \tag{3}$$

当$(\Delta x,\ \Delta y)$在 Δz 平面上趋向于(0，0)时，ε_1 和 ε_2 趋向于 0. 把(2)和(3)代入(1)就可以得到：

$$\begin{aligned}\Delta w =& u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\ &+ i[v_x(x_0,y_0)\Delta x + v_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}].\end{aligned} \tag{4}$$

假设柯西-黎曼方程于点$(x_0,\ y_0)$成立，我们在方程(4)中可以用$-v_x(x_0,\ y_0)$替代 $u_y(x_0,\ y_0)$，用 $u_x(x_0,\ y_0)$替代 $v_y(x_0,\ y_0)$，然后用 Δz 除以两边就得到

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta z}. \tag{5}$$

64

但是$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = |\Delta z|$，因此

$$\left|\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta z}\right| = 1.$$

并且当$(\Delta x,\ \Delta y)$趋于(0，0)时，$\varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ 趋于 0，因此方程(5)的右边的项当 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ 趋于 0 时也趋于 0，这就意味着方程(5)的右边的极限存在且

$$f'(z_0) = u_x + iv_x, \tag{6}$$

其中右边在点$(x_0,\ y_0)$取值.

例 1 考虑指数函数

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy}(z = x+iy)$$

其映射性质我们在 13 节已经讨论过. 观察欧拉公式(见第 6 节)，可以将其写为

$$f(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y$$

当 $\sin y$、$\cos y$ 取值时 y 为幅角，那么

$$u(x,y) = e^x\cos y \quad 且 \quad v(x,y) = e^x\sin y$$

因为 $u_x = v_y$，$u_y = -v_x$ 处处成立，且这些导数都是处处连续的，在整个复平面上定理的条件都得到满足，所以 $f'(z)$处处存在，并且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x\cos y + ie^x\sin y$$

注意：$f'(z) = f(z)$.

例 2 从本节的定理可以知道函数 $f(z) = |z|^2$，分量为

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \quad 且 \quad v(x,y) = 0$$

在点 $z=0$ 导数存在. 实际上，$f'(0) = 0 + i0 = 0$(与 18 节的例 2 做比较)，可以知道：在任何一个非零的点导数不存在，因为在这些点不能满足柯西-黎曼方程.

㊀ 例如：可以参考 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed., pp. 150-151 and 197-198, 1983.

22 极坐标

如果 $z_0\neq0$，我们将在本节中使用下面的极坐标映射

65

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1}$$

来复述 21 节中的定理.

函数 $w=f(z)=u+iv$ 的实部和虚部用变量 x 和 y 来表示还是用 r、θ 来表示取决于我们采用 $z=x+iy$ 还是 $z=re^{i\theta}(z\neq0)$ 的形式. 设 u 和 v 的关于 x 和 y 一阶偏导数在非零点 z_0 的某个邻域内处处存在，这些一阶偏导数在点 z_0 连续，那么，u 和 v 关于 r、θ 的一阶偏导数具有同样的性质，并且我们可以用两个变量的实函数的链式法则把它们写出来，更准确地说，因为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

所以可以写为

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \quad u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta. \tag{2}$$

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \quad v_\theta = -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta. \tag{3}$$

如果分别关于 x 和 y 一阶偏导数在点 z_0 满足柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{4}$$

方程(3)在点 z_0 就有

$$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\sin\theta, \quad v_\theta = u_y r\sin\theta + u_x r\cos\theta \tag{5}$$

从方程(2)和(5)可以清楚地看到在该点有

$$ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r \tag{6}$$

从另一方面说，如果已经知道方程(6)在点 z_0 成立，就可以直接证明(见练习 7)方程(4)也在该点成立. 因此方程(6)就成为柯西-黎曼方程(4)的另一种形式.

我们现在就可以用极坐标复述 21 节中的定理.

定理 设函数

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

66

在非零点 $z_0=r_0\exp(i\theta_0)$ 的某个邻域内处处有定义，并且 u 和 v 关于 r、θ 的一阶偏导数在该邻域内处处存在. 如果这些一阶偏导数在点 (r_0, θ_0) 连续并且满足下面的形式

$$ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r$$

即在点 r_0，θ_0 的柯西-黎曼方程的极坐标形式，那么 $f'(z_0)$ 存在.

这里的 $f'(z_0)$ 可以写为(见练习 8)

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r), \tag{7}$$

其中右边的式子在点 r_0、θ_0 取值.

例 1 考虑下面的函数

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \quad (z\neq0). \tag{8}$$

因为

$$u(r,\theta)=\frac{\cos\theta}{r} \quad 且 \quad v(r,\theta)=-\frac{\sin\theta}{r},$$

上面定理的条件对于复平面上任意的非零点 $z=re^{i\theta}$成立，特别是柯西-黎曼方程

$$ru_r=-\frac{\cos\theta}{r}=v_\theta \quad 且 \quad u_\theta=-\frac{\sin\theta}{r}=-rv_r$$

是成立的. 因此当 $z\neq 0$ 时 $f'(z)$存在；并且根据(7)式：

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2}+i\frac{\sin\theta}{r^2}\right)=-e^{-i\theta}\frac{e^{-i\theta}}{r^2}=-\frac{1}{(re^{i\theta})^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

例 2 上面的定理可以被用来证明：当 α 是定常数，函数

$$f(z)=\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3} \quad (r>0,\alpha<\theta<\alpha+2\pi) \tag{9}$$

在其定义域内导数是处处存在的. 这里

$$u(r,\theta)=\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3} \quad 且 \quad v(r,\theta)=\sqrt[3]{r}\sin\frac{\theta}{3}.$$

于是

$$ru_r=\frac{\sqrt[3]{r}}{3}\cos\frac{\theta}{3}=v_\theta \quad 且 \quad u_\theta=-\frac{\sqrt[3]{r}}{3}\sin\frac{\theta}{3}=-rv_r$$

67

因为定理的其他条件也是成立的，所以 $f'(z)$在 $f(z)$的定义域内是处处存在的. 从(7)式我们还可以得到

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left[\frac{1}{3(\sqrt[3]{r})^2}\cos\frac{\theta}{3}+i\frac{1}{3(\sqrt[3]{r})^2}\sin\frac{\theta}{3}\right],$$

或者

$$f'(z)=\frac{e^{-i\theta}}{3(\sqrt[3]{r})^2}e^{i\theta/3}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3})^2}=\frac{1}{3[f(z)]^2}.$$

注意当在 f 的定义域内选定某个特别的 z，则 $f(z)$在该点的取值为$\sqrt[3]{z}$(见 11 节)，所以这里 $f'(z)$最后的表达式可以写为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{1/3}=\frac{1}{3(z^{1/3})^2}$$

这样的幂函数将会在第 3 章更仔细地讨论(见 32 节).

练习

1. 使用 20 节的定理证明：如果 $f(z)$是如下的函数，则在任意点 $f'(z)$都不存在：

(a) $f(z)=\bar{z}$；　　(b) $f(z)=z-\bar{z}$；

(c) $f(z)=2x+ixy^2$；　　(d) $f(z)=e^xe^{-iy}$.

2. 使用 21 节的定理证明在下面的情况下 $f'(z)$和 $f''(z)$是处处存在的，并求出 $f''(z)$.

(a) $f(z)=iz+2$；　　(b) $f(z)=e^{-x}e^{-iy}$；

(c) $f(z)=z^3$； (d) $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$.

答案：(b) $f''(z)=f(z)$；(d) $f''(z)=-f(z)$.

3. 使用20节和21节的定理讨论在下面的情况下 $f'(z)$存在的条件，并将其求出.

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z}$； (b) $f(z)=x^2+iy^2$； (c) $f(z)=z\operatorname{Im}z$.

答案：(a) $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}(z\neq0)$；(b) $f'(x+ix)=2x$；(c) $f'(0)=0$.

4. 使用22节的定理证明下列函数在其定义域内是可导的，并用该节的表达式(7)来找出 $f'(z)$.

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z^4}(z\neq0)$；

(b) $f(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2}(r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi)$；

(c) $f(z)=e^{-\theta}\cos(\ln r)+ie^{-\theta}\sin(\ln r)(r>0,\ 0<\theta<2\pi)$.

68

答案：(b) $f'(z)=\dfrac{1}{2f(z)}$；(c) $f'(z)=i\dfrac{f(z)}{z}$.

5. 证明当 $f(z)=x^3+i(1-y)^3$，仅当 $z=i$ 时，才可以有下面的形式：

$$f'(z)=u_x+iv_x=3x^2.$$

6. 令 u 和 v 分别为由下面的方程所决定的函数 f 的实部和虚部：

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z}, & \text{当 } z\neq0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } z=0 \text{ 时}\end{cases}$$

证明函数 f 在原点满足柯西-黎曼方程 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$(试比较19节的练习9，在那里证明了 $f'(0)$是不存在的).

7. 从22节方程(2)解出 u_x，u_y，证明

$$u_x=u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r},\quad u_y=u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}.$$

然后用与这些方程相似的方法解出 v_x，v_y，证明：在22节中，如果方程(6)在点 z_0 成立，则方程(4)也在点 z_0 成立. 这样就完成了22节方程(6)的证明，此即柯西-黎曼方程的极坐标形式的证明.

8. 设函数 $f=u+iv$ 在非零点 $z_0=r_0\exp(i\theta_0)$可导，使用练习7中的 u_x、u_y 并结合22节方程(6)即柯西-黎曼方程的极坐标形式，把21节中的表达式

$$f'(z_0)=u_x+iv_x$$

改写为

$$f'(z_0)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r)$$

的形式，这里 u_r、v_r 在点(r_0,θ_0)取值.

9. (a)用22节方程(6)即柯西-黎曼方程的极坐标形式，来推导练习8中 $f'(z_0)$的如下形式的表达式

$$f'(z_0)=\frac{-i}{z_0}(u_\theta+iv_\theta).$$

(b)用(a)中 $f'(z)$ 的表达式证明：22 节例 1 中函数 $f(z)=\frac{1}{z}(z\neq 0)$ 的导数是 $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$.

10. (a)回忆(第 5 节) $\bar{z}=x+iy$，那么

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}\quad 且\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

69

通过形式地运用微积分当中二元实函数 $F(x, y)$ 的导数链式法则，来推导下面的式子

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

(b)由(a)提示，可定义算子

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

证明，如果一个函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 的实部和虚部的一阶偏导数满足柯西-黎曼方程，那么

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}[(u_x-v_y)+i(v_x+u_y)]=0.$$

这样就推导出柯西-黎曼方程的复形式 $\partial f/\partial \bar{z}=0$.

23 解析函数

现在我们介绍解析函数的概念. 如果一个复函数 $f(z)$ 在某个开集的每一个点都可导，则称它在这个开集上是解析的. 如果说一个复函数 f 在某个非开集 S 上解析[⊖]，则理解为它在包含 S 的某个开集上解析. 特别地，f 在点 z_0 解析是指它在该点的某个邻域内解析.

我们注意到，例如，函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在复平面上的每个非零点都是解析的，但是函数 $f(z)=\frac{1}{|z|^2}$ 在复平面上的任何非零点都是不解析的，这是因为它的导数仅在点 $z=0$ 存在并且在它的任何邻域内都不存在(见 18 节的例 2).

整函数是在整个复平面上都解析的函数，因为多项式的导数是处处存在的，所以多项式是整函数.

如果函数 f 在点 z_0 的某个去心邻域内解析，但是在点 z_0 不解析，则把 z_0 称为奇点，或者说是 f 的奇点. 点 $z=0$ 明显是函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的奇点，而函数 $f(z)=|z|^2$ 没有任何的奇点，因为它是处处不解析的.

⊖ 在某些文献中也用正则和全纯的概念来表示解析.

函数 f 在某个区域 D 解析的一个必要但不是充分的条件为：函数 f 在整个区域 D 是连续的. 函数对柯西-黎曼方程的满足对于解析是必要而不充分的条件，函数在某个区域 D 解析的充分必要条件可以由 21 和 22 节的定理得到.

70

其他有用的充分条件可以从 19 节中的导数公式得到. 当两个函数可导时，它们的和与积的导数也是存在的，因此，*如果两个函数在某个区域 D 解析，那么它们的和与积也在该区域上解析*. 类似地，*如果被除的函数在区域 D 内不为零，那么两个函数的商在该区域内也是解析的*. 特别地，两个多项式的商 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)\neq 0$ 的区域内是解析的.

从复合函数导数的链式法则，我们可以发现*两个解析函数的复合仍然是解析的*，更准确地说：如果函数 $f(z)$ 在某个区域 D 内解析并且在映射 $w=f(z)$ 下的像(见 12 节)包含于函数 $g(w)$ 的定义域，那么复合函数 $g[f(z)]$ 在区域 D 内解析，且导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g[f(z)]=g'[f(z)]f'(z).$$

下面的定理不仅是我们所要期望的，也是很有用的.

定理 *若函数 $f(z)$ 在区域 D 内是解析的，且在区域 D 内处处满足 $f'(z)=0$，则 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.*

我们通过写 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的形式来证明. 由于函数在整个区域 D 内满足 $f'(z)=0$，注意到 $u_x+iv_x=0$：并且由柯西-黎曼方程 $v_y-iu_y=0$，所以

$$u_x=u_y=v_x=v_y=0$$

在整个区域 D 内每一点都成立.

下一步，对任意一条从点 P 到点 P' 的直线段 L 都位于 D 内，我们证明 $u(x,y)$ 在直线段 L 上为常数，我们用 s 表示从点 P 出发到 L 上任意一点的距离，$\boldsymbol{U}$ 表示沿 s 增加的方向的 L 上的单位向量(见图 30).

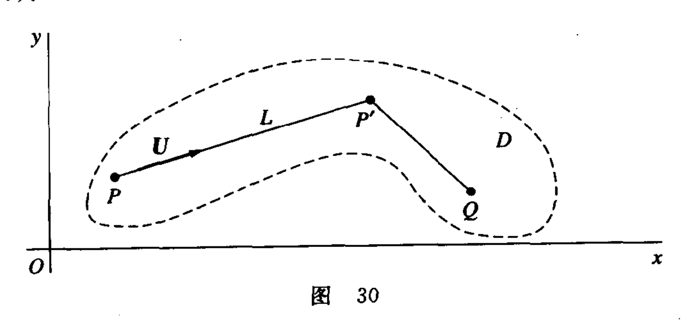


图 30

从微积分我们知道：方向导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$ 可以写为内积的形式

71

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=(\operatorname{grad}\ u)\cdot\boldsymbol{U}, \tag{1}$$

这里 grad u 是梯度向量

$$\operatorname{grad}\ u=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}. \tag{2}$$

因为 u_x，u_y 在区域 D 内是处处为零的，那么梯度 grad u 在 L 上处处为零，因此由(1)就有导数$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$在 L 上处处为零；这就意味着 u 在 L 上为常数.

最后，因为对于区域 D 的两个不同点 P 和 Q 总可以找到这样的有限条直线段把它们连起来(见第 10 节)，u 在点 P 和 Q 的取值是相同的，那么，我们就可以得到这样的结论：存在一个实常数 a，使得 $u(x, y)=a$ 在整个区域 D 内处处成立. 类似地，$v(x, y)=b$；我们就可以得到 $f(z)=a+ib$ 于 D 内的每个点都成立.

24 举例

正如 23 节中所指出：通过使用 19 节所给的各种微分公式，可以判断一个函数是否解析.

例 1 商

$$f(z) = \frac{z^3+4}{(z^2-3)(z^2+1)}$$

除在奇点 $z=\pm\sqrt{3}$，$z=\pm i$ 外，在整个 z 平面上都是解析的，其解析性是取决于我们所熟悉的微分公式的存在性，当我们需要求 $f'(z)$的时候就可以用这些公式.

当一个函数以分量 $u(x, y)$和 $v(x, y)$的形式给出，要验证其解析性可以直接用柯西-黎曼方程.

例 2 当

$$f(z) = \cosh x \cos y + i\sinh x \sin y,$$

其分量为

$$u(x,y) = \cosh x \cos y \quad 且 \quad v(x,y) = \sinh x \sin y.$$

因为

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y \quad 且 \quad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$$

处处成立，所以由 21 节的定理可知 f 是整函数.

[72]

最后，我们将举例说明前四节的定理，特别是 23 节的定理，可以用来获取解析函数的一些重要性质.

例 3 如果函数

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

与其共轭函数

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$$

在区域 D 内都是解析的. 容易验证函数在区域 D 内为常数.

为了证明这一点，我们把$\overline{f(z)}$写为

$$\overline{f(z)} = U(x,y) + iV(x,y),$$

这里

$$U(x,y) = u(x,y) \quad 且 \quad V(x,y) = -v(x,y). \tag{1}$$

$f(z)$在区域 D 内解析，由 20 节的定理，柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{2}$$

在区域 D 内是成立的，同样的道理，$\overline{f(z)}$在区域 D 内解析告诉我们

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x.$$

观察(1)式可知最后的式子可以写为

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x. \tag{3}$$

把(2)和(3)的第一个方程的对应两边相加，我们就可以得到区域 D 内 $u_x=0$；同样的道理，把(2)和(3)的第二个方程的对应两边相减，便可知 $v_x=0$，那么根据 20 节的(8)式：

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0;$$

从 23 节的定理便可知 $f(z)$在整个区域 D 内为常数.

练习

1. 用 21 节的定理来证明下面的函数都是整函数

(a) $f(z)=3x+y+i(3y-x)$；　(b) $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$；

73

(c) $f(z)=e^{-y}\sin x-ie^{-y}\cos x$；　(d) $f(z)=(z^2-2)e^{-x}e^{-iy}$.

2. 用 20 节的定理来证明下面的函数都是处处不解析的：

(a) $f(z)=xy+iy$；　(b) $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$；

(c) $f(z)=e^y e^{ix}$.

3. 说明为什么两个整函数的复合是整函数. 并且说明为什么两个整函数的线性组合 $c_1 f_1(z)+c_2 f_2(z)$是整函数(其中 c_1、c_2 是复常数).

4. 找出下列函数的奇点并说明为什么函数除这些点外是解析的：

(a) $f(z)=\dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$；　(b) $f(z)=\dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$；

(c) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$.

答案：(a) $z=0$，$\pm i$；(b) $z=1$，2；(c) $z=-2$，$-1\pm i$.

5. 根据 22 节的练习 4(b)，函数

$$g(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad (r>0, -\pi<\theta<\pi)$$

在其定义域内是解析的，并且满足

$$g'(z) = \frac{1}{2g(z)}.$$

证明复合函数 $G(z)=g(2z-2+i)$在半平面 $x>1$ 是解析的，并且

$$G'(z) = \frac{1}{g(2z-2+i)}.$$

提示：当 $x>1$ 时，$\mathrm{Re}(2z-2+i)>0$.

6. 用 22 节的结果来证明函数

$$g(z)=\ln r+i\theta \quad (r>0,0<\theta<2\pi)$$

在其定义域内是解析的并且满足 $g'(z)=\frac{1}{z}$，由此证明复合函数 $G(z)=g(z^2+1)$ 在第一象限 $x>0$，$y>0$ 是解析的，并且

$$G'(z)=\frac{2z}{z^2+1}.$$

提示：当 $x>0$，$y>0$ 时，$\mathrm{Im}(z^2+1)>0$.

7. 令 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则如果以下条件之一成立，必有 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

(a) $f(z)$ 在区域 D 内恒取实数值；(b) $|f(z)|$ 在区域 D 内为常数.

提示：用柯西-黎曼方程和 23 节的定理来证明(a)；对于(b)，注意到当 $|f(z)|=c(c\neq 0)$ 时

$$\overline{f(z)}=\frac{c^2}{f(z)}$$

再利用 24 节例 3 的结果.

74

25 调和函数

如果两个实变量 x 和 y 的实函数 H 在所给的 xy 平面上的区域上有连续的一阶偏导数、二阶偏导数存在且满足微分方程

$$H_{xx}(x,y)+H_{yy}(x,y)=0, \tag{1}$$

即拉普拉斯方程在整个区域内成立，则称 H 是调和的.

调和函数有着重要的应用. 例如，在 xy 平面中薄圆盘上的温度函数 $H(x, y)$ 就经常是调和函数. 当函数 $U(x, y)$ 表示在与电荷无关的三维空间内部变化的静电势能时，它是调和的.

例 1 容易验证函数 $T(x, y)=e^{-y}\sin x$ 在 xy 平面上的任何区域内是调和函数，特别是它在无穷半带形 $0<x<\pi$，$y>0$ 上调和. 它还可以取如图 31 所示的带形的边界值，更准确地说它满足以下所有条件：

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0,$$
$$T(0,y)=0, \quad T(\pi,y)=0,$$
$$T(x,0)=\sin x, \quad \lim_{y\to\infty}T(x,y)=0,$$

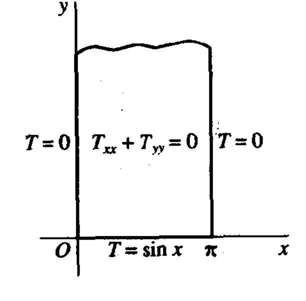


图 31

这表明了 xy 平面中薄圆盘上的温度是稳定的，上面没有吸热和放热的点，并且除了沿边界的条件以外没有隔离的点.

我们将在后面的第 10 章和其后的一些章节里考虑运用单复变函数的理论来求如例 1 中的温度的解，以及其他问题的解⊖. 这个理论源于下面的定理，它提供了调和函数的一种来源.

75

定理 1 如果函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 区域 D 内解析，则它的分量 u 和 v 在区域 D

⊖ 另外的重要方法在作者的另一本著作 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed., 2001 中有所阐述.

内为调和函数.

要证明这个结论，我们需要利用在第 4 章证明过的一个结果(见 48 节)，即：如果一个单复变函数在某个点解析，那么它的实部和虚部在该点有连续的各阶偏导数.

设 $f(z)$在区域 D 内解析，那么它的实部和虚部在该点有连续的一阶偏导数，且在整个区域内满足柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

对上面的式子两边关于 x 求导，我们就有

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yx} = -v_{xx}. \tag{3}$$

同理两边关于 y 求导，我们就有

$$u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}. \tag{4}$$

根据微积分中的定理[⊖]它的实部和虚部在该点有连续的各阶偏导数保证了 $u_{yx}=u_{xy}$，$v_{yx}=v_{xy}$，于是从方程(3)和(4)就有

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

此即 u 和 v 在区域 D 内为调和函数.

例 2 如 24 节练习 1(c)中所证明的函数 $f(z)=e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$ 是整函数，因此它的实部，也就是例 1 中的温度 $T(x, y)=e^{-y}\sin x$，在 xy 平面上的每一个区域都是调和的.

例 3 因为函数 $f(z)=\frac{i}{z^2}$在 $z\neq 0$ 的点是解析的并且

76

$$\frac{i}{z^2} = \frac{i}{z^2}\cdot\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2} = \frac{i\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{i\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{2xy + i(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

下面两个函数

$$u(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{和} \quad v(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

在 xy 平面上的每一个不包含原点的区域都是调和的.

如果两个给定的函数 u 和 v 在区域 D 内为调和函数，它们的一阶偏导数在整个区域内满足柯西-黎曼方程(2)，则 v 称为是 u 的一个共轭调和函数. 这里的共轭的概念当然与第 5 节中 $\bar{z}$ 的定义是不同的.

定理 2 函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在区域 D 内解析当且仅当 v 是 u 的共轭调和函数.

证明是简单的：如果 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数，21 节的定理告诉我们函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析；反之，如果函数 $f(z)$在区域 D 内解析，由上面的定理 1 便知道 u 和 v 在区域 D 内为调和函数，并且由 20 节的定理可以知道还满足柯西-黎曼方程.

下面的例子表明 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数，一般说来 u 未必是 v 在区域 D 内的共轭调和函数(可以见练习 3 和 4).

⊖ 例如，参看 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed., pp. 199-201, 1983.

例 4 令

$$u(x,y)=x^2-y^2 \quad 和 \quad v(x,y)=2xy.$$

因为它们分别是整函数 $f(z)=z^2$ 的实部和虚部，我们知道 v 是 u 在整个平面上的共轭调和函数，但是 u 不是 v 的共轭调和函数，这是因为在 24 节练习 2 的(b)中证明了函数 $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$ 无处解析.

在第 9 章的 97 节里我们将证明在某一类型的区域里调和函数总有共轭调和函数，因此，在这样的区域里每个调和函数都是某个解析函数的实部. 并且共轭调和函数在相差一个常数的意义下是唯一的.

例 5 我们下面给出一种求解一个给定调和函数的共轭调和函数的方法. 很容易看到函数

$$u(x,y)=y^3-3x^2y \tag{5}$$

77

在整个平面上是调和函数，因为由柯西-黎曼方程的可以使共轭调和函数 $v(x, y)$ 与 $u(x, y)$ 发生联系

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x, \tag{6}$$

第一个方程告诉我们

$$v_y(x,y)=-6xy.$$

把 x 固定，关于 y 两边积分，我们就有

$$v(x,y)=-3xy^2+\phi(x), \tag{7}$$

这里 $\phi(x)$ 是 x 的任意函数，用方程(6)的第二个式子，我们有

$$3y^2-3x^2=3y^2-\phi'(x),$$

或者 $\phi'(x)=3x^2$. 因此 $\phi(x)=x^3+C$，这里 C 是一个任意的实数. 根据方程(7)，那么函数

$$v(x,y)=-3xy^2+x^3+C \tag{8}$$

是 $u(x, y)$ 的一个共轭函数.

相应的解析函数是

$$f(z)=(y^3-3x^2y)+i(-3xy^2+x^3+C). \tag{9}$$

易知 $f(z)=i(z^3+C)$，注意当 $y=0$ 时(9)式便成为 $f(x)=i(x^3+C)$.

练习

1. 证明如下的 $u(x, y)$ 在某个区域内是调和函数，并找出它的一个共轭调和函数 $v(x, y)$：

(a) $u(x, y)=2x(1-y)$； (b) $u(x, y)=2x-x^3+3xy^2$；

(c) $u(x, y)=\sinh x\sin y$； (d) $u(x, y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

答案：(a) $v(x, y)=x^2-y^2+2y$；(b) $v(x, y)=2y-3x^2y+y^3$；(c) $v(x, y)=-\cosh x\cos y$；(d) $v(x, y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

2. 证明如果 v 和 V 都是 u 在区域 D 内共轭调和函数，那么 $v(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 最多相差一个常数.

3. 证明如果 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数，u 也是 v 在区域 D 内的共轭调和函数，则 v

(x, y)和 $u(x, y)$在区域 D 内为常数.

4. 用 25 节的定理 2 来证明，在区域 D 内 v 是 u 的共轭调和函数，当且仅当 $-u$ 是 v 的共轭调和函数(比较练习 3 所得的结果).

78

提示：观察函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在区域 D 内解析，当且仅当 $-if(z)$也在该区域解析.

5. 函数 $f(z)=u(r, \theta)+iv(r, \theta)$在不包含原点的区域 D 内解析，使用极坐标形式的柯西-黎曼方程(见 22 节)并且假使有连续的偏导数，证明在整个区域 D 内 $u(r, \theta)$满足下面的偏微分方程

$$r^2 u_{rr}(r,\theta) + ru_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0,$$

这就是极坐标形式的拉普拉斯方程，证明 $v(r, \theta)$也满足同样的方程.

6. 通过验证函数 $u(r, \theta)=\ln r$ 在区域 $r>0$、$0<\theta<2\pi$ 内满足练习 5 中的极坐标形式的拉普拉斯方程来证明它在该区域内调和. 然后再用 25 节例 5 的方法并结合极坐标形式的柯西-黎曼方程(见 22 节)，来找出共轭调和函数 $v(r, \theta)=\theta$(比较 24 节的练习 6).

7. 设函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在区域 D 内解析，考虑水平截线族 $u(x, y)=c_1$、$v(x, y)=c_2$，这里 c_1 和 c_2 是任意的实常数. 证明这些族是正交的，更准确地，证明如果 $z_0=(x_0, y_0)$是两条给定曲线 $u(x, y)=c_1$ 和 $v(x, y)=c_2$ 在区域 D 内的交点，并且 $f'(z_0)\neq 0$，那么这两条给定曲线在点(x_0, y_0)的切线垂直.

提示：注意由方程 $u(x, y)=c_1$，$v(x, y)=c_2$ 可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \quad 且 \quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

8. 证明函数 $f(z)=z^2$ 的水平截线族 $u(x, y)=c_1$，$v(x, y)=c_2$ 为如图 32 所示的双曲线. 注意在练习 7 中描述过的这两族曲线的正交性.

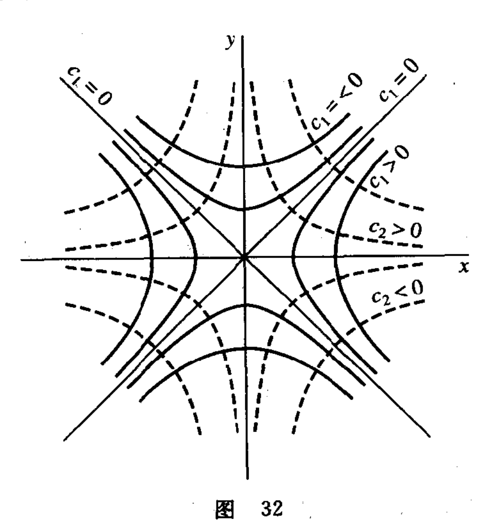


图 32

观察 $u(x, y)=0$，$v(x, y)=0$ 在原点相交，但是在该点不是正交的，为什么这一事实与练习 7 并不矛盾?

9. 当函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 时画出分量 u 和 v 的水平截线族，注意练习 7 中描述过的正交性.

10. 在极坐标形式下来做练习 9.

11. 当函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 时画出分量 u 和 v 的水平截线族，注意练习 7 中描述过的正交性在这里是如何被阐明的.

26 唯一确定的解析函数

我们用两节的篇幅得出本章的如下结论：一个解析函数在区域 D 内的值是如何受它在子区域内的取值或者是在位于区域 D 内的线段上的取值所影响的. 这两节在理论上是很有用的，但它们在我们将要论述的后面章节中并不是主要的内容，读者可以直接阅读第 3 章，在需要的时候再回来查阅这两节的内容.

引理 *如果*

(i)函数 f 在整个区域 D 内解析；

(ii)在区域 D 的一个子区域内的每一点 z 或是位于区域 D 内的线段上的每一点 z，有 $f(z)=0$.

那么 $f(z)\equiv 0$ 在区域 D 内成立，也就是说 $f(z)$ 在整个区域 D 内恒为零.

下面我们证明这个引理，令函数 f 满足所给条件，z_0 为区域内的任意一点或是位于区域 D 内的线段上的任意一点，使得 $f(z)=0$. 因为 D 是连通的开集(见第 10 节)，存在多边形 L，它由有限条位于 D 内且首尾相连的线段组成，把 z_0 和其他 D 内的点 P 连到一起. 令 d 为 L 上的点到 D 的边界的最短距离，除非 D 是整个平面，在这样的情况下 d 是正实数. 我们就可以得到一个 L 上的有限点列

$$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$$

这里 z_n 和 P 重合(如图 33)并且每个点都足够接近邻近点

$$|z_k - z_{k-1}| < d \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

最后我们构造一列有限邻域

$$N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}, N_n,$$

79 ~ 80

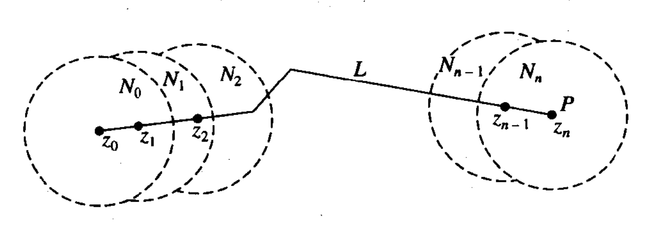


图 33

这里每个 N_k 以 z_k 为中心，d 为半径. 注意这些邻域都在区域 D 内并且 N_k 的中心 z_k 位于前面的邻域 N_{k-1} 内.

在这里我们需要使用将在第 6 章当中被证明的一个结果，68 节的定理 3 告诉我们：函数 f 在区域 N_0 内解析并且在包含 z_0 的一个区域或者是线段上 $f(z)=0$，那么在 N_0 内 $f(z)\equiv0$. 但是点 z_1 位于 N_0 内，因此同样再一次运用这个定理就有 $f(z)\equiv0$ 于 N_1 内成立，通过继续运用这样的手段，我们就可以得到在 N_n 内 $f(z)\equiv0$，因为 N_n 以 P 为中心，P 又是从区域 D 中任意选取的，我们就有在整个区域 D 内 $f(z)\equiv0$，这样就完成了证明.

现在假使两个函数 f 和 g 在同一个区域 D 内解析，并且 $f(z)=g(z)$ 于子区域内的每一点或是位于区域 D 内的线段上的每一点成立，那么差

$$h(z)=f(z)-g(z)$$

也在区域 D 内解析，并且在该子区域内的每一点或是该线段上的每一点 $h(z)=0$. 这就是说，$f(z)=g(z)$ 于区域 D 内的每一点都成立，这样我们就得到下面的重要定理：

定理 一个在区域 D 内解析的函数，由它在区域 D 的子区域或者是区域 D 内的直线段上的取值唯一决定.

这个定理在延拓解析函数的定义域时是非常有用的. 更准确地说，如果给了两个区域 D_1 和 D_2，考虑它们的交 $D_1\cap D_2$，它由既在 D_1 又在 D_2 里的点组成. 前提是 $D_1\cap D_2$ 有公共点（见图 34）并且函数 f_1 在 D_1 内解析，那么，就有可能存在函数 f_2 在 D_2 内解析，且在 $D_1\cap D_2$ 内 $f_2(z)=f_1(z)$. 如果这样，我们称 f_2 为 f_1 在 D_2 的解析延拓.

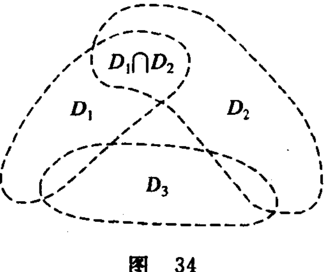


图 34

根据刚才所证明的定理，如果存在解析延拓则必定是唯一的，这就是说最多有一个函数在 D_2 内解析且取值在 $D_1\cap D_2$ 与 f_1 相同. 然而，如果存在 f_2 的解析延拓 f_3 把 D_2 映到与 D_1 有交的 D_3，如图 34 所示，对于 $D_1\cap D_3$ 中的任一点 z，并不一定要 $f_3(z)=f_1(z)$，27 节的练习 2 表明了这一点.

如果 f_2 为 f_1 从 D_1 到 D_2 的解析延拓，那么由下面的方程定义的函数 F

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & \text{当 } z\in D_1 \text{ 时}\\ f_2(z), & \text{当 } z\in D_2 \text{ 时}\end{cases}$$

在并 $D_1\cup D_2$（表示所有位于 D_1 或者是 D_2 内的点）内解析. 函数 F 是 f_2 或者 f_1 在 $D_1\cup D_2$ 的解析延拓，f_2 和 f_1 称为 F 的*元素*.

27 反射原理

本节的定理考虑这一事实：有些解析函数具有在某些区域上满足 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ 的性质，但是有的函数不具有这个性质. 例如，我们注意到 $z+1$ 和 z^2 在区域 D 是整个平面的时候具有这个性质，但是对于 $z+i$ 和 iz^2 是不正确的. 下面的定理被称为*反射原理*，提供了一种判别是否满足 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ 的方式：

定理 设 D 为一个包含实轴上一条线段的区域，并且区域 D 关于实轴对称，即区域 D 在

实轴的下面部分是区域 D 在实轴的上面部分关于实轴的反射．设 f 在区域 D 内解析，那么

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \tag{1}$$

对于该区域 D 内的每一点 z 都成立的充要条件是对于在区域 D 内的实轴线段上的点 x，$f(x)$ 取实数值．

我们下面开始证明，先假设对于此实轴线段上的点，$f(x)$取实数值．一旦我们证明函数

81～82

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} \tag{2}$$

在 D 内解析，我们就将用它来得到方程(1)．为了建立 $F(z)$的解析性，我们令

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

且由于

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y), \tag{3}$$

注意方程(2)，便知 $F(z)$和 $f(x)$的分量通过下面的方程联系

$$U(x,y) = u(x,t) \quad 且 \quad V(x,y) = -v(x,t), \tag{4}$$

这里 $t=-y$．现在由于 $f(x+it)$是关于 $x+it$ 的解析函数，$u(x, t)$和 $v(x, t)$有连续的一阶偏导数且在整个区域 D 内满足柯西-黎曼方程[⊖]．

$$u_x = v_t, \quad u_t = -v_x. \tag{5}$$

更进一步，观察方程(4)便有

$$U_x = u_x, \quad V_y = -v_t \frac{dt}{dy} = v_t;$$

再结合方程(5)的第一个式子 $U_x = v_y$，类似地

$$U_y = u_t \frac{dt}{dy} = -u_t, \quad V_x = -v_x;$$

结合方程(5)的第二个式子告诉我们 $U_y = -V_x$．至此，我们可以看到 $U(x, y)$和 $V(x, y)$在 D 内有连续的一阶偏导数且在整个区域 D 内满足柯西-黎曼方程，因此 $F(z)$在 D 内解析．并且，因为在位于区域 D 内的实轴线段上 $f(x)$取实数值，在线段上有 $v(x, 0)=0$，观察方程(4)可见

$$F(x) = U(x,0) + iV(x,0) = u(x,0) - iv(x,0) = u(x,0).$$

也就是

$$F(z) = f(z) \tag{6}$$

在该线段上的每一个点成立．现在我们回到 26 节的定理，该定理告诉我们：一个在区域 D 内解析的函数，由它在区域 D 的子区域或者是区域 D 内的直线段上的取值唯一决定．于是方程(6)实际上在整个区域 D 内成立．由方程(2)当中 $F(z)$的定义有

83

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z); \tag{7}$$

这和方程(1)是相同的．

为了证明另一方面，我们假设方程(1)成立并且由(3)式，(7)的形如方程(1)的形式可以写为

⊖ 见 2.15 节的定理 1 后面的段落．

$$u(x,-y)-iv(x,-y)=u(x,y)+iv(x,y).$$

特别地，如果$(x,\ 0)$是实轴上位于区域D内的线段上的一点

$$u(x,0)-iv(x,0)=u(x,0)+iv(x,0);$$

并且，让实部和虚部分别相等，我们就有$v(x,\ 0)=0$，因此，$f(x)$在位于区域D内的实轴线段上取实数值.

例 刚好在定理的证明之前我们注意到

$$\overline{z+1}=\bar{z}+1 \quad \text{且} \quad \overline{z^2}=\bar{z}^2$$

对于整个平面都成立. 定理告诉我们反射原理在这里当然是正确的，因为$x+1$，x^2是实数，我们也注意到$z+i$，iz^2不具有反射性质，并且我们现在知道这是因为$x+i$、ix^2不是实数.

练习

1. 使用26节的定理证明：如果函数$f(z)$在整个区域D内解析并且在整个区域D内都不为常数，那么它在区域D内的任意子区域内都不为常数.

提示：假设函数$f(z)$在区域D内的某个邻域内取常数值w_0.

2. 考虑函数

$$f_1(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad (r>0,0<\theta<\pi)$$

并参考第22节练习4的(b)，指出为什么

$$f_2(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad \left(r>0,\frac{\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$$

是$f_1(z)$的通过负实轴向下半平面的解析延拓. 然后证明函数

$$f_3(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad \left(r>0,\pi<\theta<\frac{5\pi}{2}\right)$$

[84] 是$f_2(z)$的通过正实轴向第一象限的解析延拓，但是$f_3(z)=-f_1(z)$.

3. 说明为什么函数

$$f_4(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad (r>0,-\pi<\theta<\pi)$$

是练习2当中函数$f_1(z)$的通过负实轴向下半平面的解析延拓.

4. 从21节例1我们知道函数

$$f(z)=e^x e^{iy}$$

在有限平面处处有导数. 指出怎样由反射原理(见27节)得到

$$\overline{f(z)}=f(\bar{z})$$

对于每个z成立. 然后直接证明.

5. 证明如果反射原理当中的$f(x)$取实数值的条件替换为：$f(x)$取纯虚数，那么其中的方程(1)就变为

[85]

$$\overline{f(z)}=-f(\bar{z}).$$

第3章 初等函数

本章中我们考虑微积分中学过的各种不同的初等函数，并相应地定义复变量的函数. 特别地，当 $z=x+i0$ 时，我们定义复变量 z 的解析函数就是微积分中的初等函数. 我们首先定义复指数函数，然后用它来导出其他函数.

28 指数函数

正如前面(第 13 节)所述，我们通过以下的方式来定义指数函数

$$e^z = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy), \tag{1}$$

在这里，我们用的是欧拉公式(参看第 6 节)

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \tag{2}$$

y 指弧度. 从这个定义我们可以看出当 $y=0$ 时，e^z 就是微积分中的一般的指数函数；像在微积分中一样，我们常常把 e^z 写作 $\exp z$.

注意当 $x=1/n(n=2, 3, \cdots)$时，e^x 的值就是 e 的正的 n 次方根$\sqrt[n]{e}$，表达式(1)告诉我们当 $z=1/n(n=2, 3, \cdots)$时，复指数函数 e^z 也是$\sqrt[n]{e}$. 第 8 节中讲到 e 的 n 次方根的时候，一般要求我们解释说明 $e^{1/n}$，这里是一种特殊情况.

根据定义(1)，$e^x e^{iy}=e^{x+iy}$；第 13 节中提到的 e^x 在微积分中的加法性质

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

也说明了这一点. 这个性质推广到复变函数中就是

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \tag{3}$$

为了证明这个式子，我们有如下写法

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad 且\ z_2 = x_2 + iy_2.$$

则

$$e^{z_1} e^{z_2} = (e^{x_1} e^{iy_1})(e^{x_2} e^{iy_2}) = (e^{x_1} e^{x_2})(e^{iy_1} e^{iy_2}).$$

但是 x_1，x_2 都是实数，我们从第 7 节中知道

$$e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}.$$

因此

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{(x_1+x_2)} e^{i(y_1+y_2)};$$

由于

$$(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2,$$

上式右端变为 $e^{z_1+z_2}$. 性质(3)证毕.

由性质(3)我们知道 $e^{z_1-z_2} e^{z_2}=e^{z_1}$，或者

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}. \tag{4}$$

由于 $e^0=1$ 所以 $1/e^z=e^{-z}$.

我们知道 e^z 还有许多其他重要的性质. 例如，由第 21 节中的例 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^z \tag{5}$$

在整个 z 平面上处处成立. 注意到对所有的 z，e^z 可微，所以 e^z 是整函数.

对任意复数 z，

$$e^z\neq 0 \tag{6}$$

成立. 当把定义(1)写成如下形式

88

$$e^z=\rho e^{i\phi},\quad 其中\ \rho=e^x\ 且\ \phi=y$$

的时候，(6)就很清楚了. 上式告诉我们

$$|e^z|=e^x\quad 且\ \arg(e^z)=y+2n\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{7}$$

观察上式可知 $|e^z|>0$ 总成立，所以(6)成立.

e^z 还有一些性质是我们所未知的. 例如，由于

$$e^{z+2\pi i}=e^ze^{2\pi i}\quad 且\ e^{2\pi i}=1,$$

所以 e^z 是具有纯虚数周期 $2\pi i$ 的周期函数：

$$e^{z+2\pi i}=e^z. \tag{8}$$

下面的例子告诉我们 e^z 还有一些 e^x 所不具有的性质. 那就是 e^x 总是非负的，但是 e^z 可以取负值.

例 存在 z，使

$$e^z=-1. \tag{9}$$

为了找出这个 z，我们把(9)式写成 $e^xe^{iy}=1e^{i\pi}$. 考虑到第 8 节开头的楷体字对两个具有指数形式的非零复数的相等所做的说明，我们有

$$e^x=1\quad 且\ y=\pi+2n\pi\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

因此 $x=0$，我们得到

$$z=(2n+1)\pi i\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{10}$$

练习

1. 证明

(a) $\exp(2\pm 3\pi i)=-e^2$；

(b) $\exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$；

(c) $\exp(z+\pi i)=-\exp z$.

2. 说明为什么 $2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ 是整函数.

3. 利用第 20 节中的柯西-黎曼方程和定理证明 $f(z)=\exp\bar{z}$ 在复平面上处处不解析.

4. 用两种方法证明 $\exp(z^2)$ 是整函数. 它的导数是什么？

答案：$2z\ \exp(z^2)$.

5. 用 x 和 y 把 $|\exp(2z+i)|$ 和 $|\exp(iz^2)|$ 表示出来，然后证明

$$|\exp(2z+i)+\exp(iz^2)|\leqslant e^{2x}+e^{-2xy}.$$

6. 证明 $|\exp(z^2)|\leqslant\exp(|z|^2)$.

89

7. 证明当且仅当 $\mathrm{Re}z>0$ 时，$|\exp(-2z)|<1$.

8. 找出所有使得下式成立的 z 的值.

(a)$e^z=-2$； (b)$e^z=1+\sqrt{3}i$； (c)$\exp(2z-1)=1$.

答案：(a)$z=\ln2+(2n+1)\pi i\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(b)$z=\ln2+\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi i\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(c)$z=\frac{1}{2}+n\pi i\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

9. 证明当且仅当 $z=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$\overline{\exp(iz)}=\exp(i\bar{z})$(与第 27 节练习 4 做一下比较).

10. (a)证明如果 e^z 是实数，那么 $\mathrm{Im}\ z=n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(b)如果 e^z 是纯虚数，z 有什么限制？

11. 描述当(a)，$x\to-\infty$；(b)$y\to\infty$时 $e^z=e^xe^{iy}$ 的变化情况.

12. 用 x 和 y 把 $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$表示出来. 为什么这个函数在不包含原点的任何定义域内都是调和的？

13. 令函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在某个定义域 D 内解析，说明为什么函数 $U(x,y)=e^{u(x,y)}\cos v(x,y)$，$V(x,y)=e^{u(x,y)}\sin v(x,y)$在 D 上是调和的？为什么$V(x,y)$是$U(x,y)$的共轭调和函数？

14. 用以下方法证明等式

$$(e^z)^n=e^{nz}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(a)利用数学归纳法证明当 $n=0,1,2,\cdots$时上式成立.

(b)对负数，首先回忆一下第 7 节中当 $z\neq0$ 时，$z^n=(z^{-1})^m$，$(m=-n=1,2,\cdots)$，因此$(e^z)^n=(1/e^z)^m$. 然后利用(a)的结论，还有第 28 节中指数函数的性质 $1/e^z=e^{-z}$来说明.

29 对数函数

对数函数的定义是受如下问题的启发：当 z 为一个非零的复数时，解一个关于 w 的方程

$$e^w=z\tag{1}$$

为此，我们注意到当把 z 和 w 写成 $z=re^{i\Theta}(-\pi<\Theta\leqslant\pi)$，$w=u+iv$ 时，方程(1)就变为

$$e^ue^{iv}=re^{i\Theta}.$$

90

然后，根据第 8 节中的楷体部分对两个具有指数形式的复数相等的说明，

$$e^u=r\quad\text{且}\quad v=\Theta+2n\pi$$

这里 n 为整数. 由于方程 $e^u=r$ 等价于$u=\ln r$，所以方程(1)成立当且仅当 w 是下列值之一

$$w = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

因此，如果我们写成

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{2}$$

就得到关系式

$$e^{\log z} = z \quad (z \neq 0), \tag{3}$$

这就使得我们把表达式(2)作为非零复变量 $z = re^{i\Theta}$ 的(多值的)对数函数的定义.

例 1 如果 $z = -1 - \sqrt{3}i$，则 $r = 2$，$\Theta = -2\pi/3$. 因此

$$\log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

需要强调的是当(3)式左边的指数和对数调换次序时，右边不一定是 z. 准确地说，由于表达式(2)能够写成

$$\log z = \ln |z| + i\arg z$$

由于(第 28 节中)，

$$|e^z| = e^x \quad 且\ \arg(e^z) = y + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

当 $z = x + iy$ 时，我们知道

$$\log(e^z) = \ln |e^z| + i\arg(e^z) = \ln(e^x) + i(y + 2n\pi) = (x + iy) + 2n\pi i$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

即

91

$$\log(e^z) = z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{4}$$

方程式(2)中当 $n = 0$ 时，我们得到 $\log z$ 的主值用 $\mathrm{Log}\, z$ 来表示. 因此

$$\mathrm{Log} z = \ln r + i\Theta. \tag{5}$$

注意，当 $z \neq 0$ 时，$\mathrm{Log} z$ 有定义而且是单值的，并且

$$\log z = \mathrm{Log} z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{6}$$

当 $z = r$ 是一个正实数时，它就变为微积分中的普通的对数. 为了得到这个结论，我们把 z 写成 $z = re^{i0}$，在这种情况下，(5)式就变为 $\mathrm{Log} z = \ln r$. 也就是 $\mathrm{Log} z = \ln r$.

例 2 由表达式(2)，我们发现

$$\log 1 = \ln 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

正如上面所述，$\mathrm{Log} 1 = 0$.

下面的一个例子告诉我们，虽然在微积分中我们不能找到一个负实数的对数，但我们现在能做到了.

例 3

$$\log(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$
$$\mathrm{Log}(-1) = \pi i.$$

30 对数函数的导数和分支

如果 $z=re^{i\theta}$ 是一个非零复数，幅角 θ 是 $\theta=\Theta+2n\pi(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 中的任何一个值，这里 $\Theta=\text{Arg}z$. 第 29 节中的多值对数函数

$$\log z=\ln r+i(\Theta+2n\pi) \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

可以写成

$$\log z=\ln r+i\theta. \tag{1}$$

如果我们令 α 表示任意实数，并且限制表达式(1)中 θ 的值，使得 $\alpha<\theta<\alpha+2\pi$，那么，具有分量

$$\log z=\ln r+i\theta \quad (r>0,\alpha<\theta<\alpha+2\pi) \tag{2}$$

的函数

$$u(r,\theta)=\ln r \quad 且\ v(r,\theta)=\theta \tag{3}$$

[92]

在所给定的定义域内是单值连续的(见图 35).

注意，如果函数(2)定义在射线 $\theta=\alpha$ 上，它就不连续. 因为如果 z 是射线上一点，有趋向于 z 的点使 v 的值趋向于 α，也有趋向于 z 的点使 v 的值趋向于 $\alpha+2\pi$.

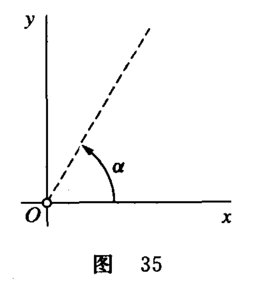


图 35

函数(2)在定义域 $r>0$，$\alpha<\theta<\alpha+2\pi$ 内不仅连续而且解析，这是因为它对 u 和 v 的一阶偏导连续，并且满足柯西-黎曼方程的极坐标形式(第 22 节)

$$ru_r=v_\theta, \quad u_\theta=-rv_r$$

而且，根据第 22 节，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z=e^{-i\theta}(u_r+iv_r)=e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r}+i0\right)=\frac{1}{re^{i\theta}};$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z=\frac{1}{z} \quad (|z|>0,\alpha<\arg z<\alpha+2\pi). \tag{4}$$

特别地，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\text{Log}z=\frac{1}{z} \quad (|z|>0,-\pi<\text{Arg }z<\pi). \tag{5}$$

设 f 是某区域内的多值函数，F 是某区域内的单值解析函数，如果 $F(z)$ 在该区域内每一点的值都等于 $f(z)$ 在该点的一个值，则 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个分支. 为了保证解析，F 的值不能从 f 的值中任意取. 注意，对每一个固定的 α，单值函数(2)是多值函数(1)的一个分支. 函数

$$\text{Log}z=\ln r+i\Theta \quad (r>0,-\pi<\Theta<\pi) \tag{6}$$

叫做主值支.

为了定义多值函数 f 的一个分支 F，我们引进支割线. 支割线是直线或曲线的一部分. F 的支割线上的点是 F 的奇点(第 23 节)，f 的所有支割线的公共点称为支点. 原点和射线 $\theta=\alpha$

[93]

是对数函数的分支(2)的支割线．原点和射线 $\Theta=\pi$ 是主值支(6)的支割线．原点很明显是多值对数函数的一个支点．

练习

1. 证明

(a) $\text{Log}(-ei)=1-\frac{\pi}{2}i$； (b) $\text{Log}(1-i)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}i$.

2. 证明当 $n=0$，±1，±2，…时，

(a) $\log e=1+2n\pi i$； (b) $\log i=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i$；

(c) $\log(-1+\sqrt{3}i)=\ln 2+2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi i$.

3. 证明

(a) $\text{Log}(1+i)^2=2\text{Log}(1+i)$； (b) $\text{Log}(-1+i)^2\neq 2\text{Log}(-1+i)$.

4. 证明

(a)当 $\log z=\ln r+i\theta$ $\left(r>0,\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{9\pi}{4}\right)$ 时，$\log(i^2)=2\log i$；

(b)当 $\log z=\ln r+i\theta$ $\left(r>0,\ \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{11\pi}{4}\right)$ 时，$\log(i^2)\neq 2\log i$.

5. 证明

(a) $\log(i^{1/2})$ 的值的集合是 $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi i$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，$(1/2)\log i$ 的值的集合也是如此．

(b) $\log(i^2)$ 的值的集合不是 $2\log i$ 的值的集合．

6. 设对数函数的分支 $\log z=\ln r+i\theta$，$(r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi)$ 在给定区域内的每一点解析，通过对等式 $\exp(\log z)=z$（见第29节）的两边求导，并运用链式法则求它的导数．

7. 找出方程 $\log z=\frac{i\pi}{2}$ 的所有根．

答案：$z=i$.

8. 假设点 $z=x+iy$ 在水平带形 $\alpha<y<\alpha+2\pi$ 中，说明当对数函数选取 $\log z=\ln r+i\theta$，$(r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi)$ 这一分支时，$\log(e^z)=z$.

9. 证明

(a)函数 $\text{Log}(z-i)$ 在除了射线 $y=1\ (x\leqslant 0)$ 外处处解析．

(b)函数

$$\frac{\text{Log}(z+4)}{z^2+i}$$

[94] 在除了点 $\pm(1-i)/\sqrt{2}$ 及实轴上除了 $x\leqslant-4$ 的部分外处处解析．

10. 用两种方法证明函数 $\ln(x^2+y^2)$ 在不包含原点的任意区域内调和．

11. 证明

$$\mathrm{Re}[\log(z-1)] = \frac{1}{2}\ln[(x-1)^2+y^2] \quad (z \neq 1).$$

为什么当 $z\neq 1$ 时，这个函数一定满足拉普拉斯方程.

31　一些关于对数的等式

正如第 29 节中的关系式(3)和(4)，还有第 30 节中的练习 3、4、5 所提示的那样，微积分中的有些对数等式可以推广到复分析中来，有的则不能. 在这一节，我们将导出一些可以推广过来的等式，有时候还有某种限制以及如何解释. 读者可以跳过这一节直接看第 32 节，如果需要的话可以只看一下结论就行了.

如果 z_1 和 z_2 是两个任意的非零复数，很容易就能证出来

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2. \tag{1}$$

上式包含一个多值函数，可以和第 7 节中的式子

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{2}$$

用同样的方法来解释. 那就是如果三个对数中的两个都是确定的，那么第三个对数也有一个值使得方程(1)成立.

(1)式可以在(2)式的基础上用以下方法证明. 由于 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，这些模都是正实数，我们从微积分中正实数的对数的性质知道

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|.$$

因此由上式和方程(2)知

$$\ln|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) = (\ln|z_1| + i\arg z_1) + (\ln|z_2| + i\arg z_2). \tag{3}$$

最后由方程(1)和(2)的解释说明，方程(3)就是方程(1).

例　我们来举例说明表达式(1)，令 $z_1 = z_2 = -1$，注意到 $z_1 z_2 = 1$. 如果 $\log z_1 = \pi i$，$\log z_2 = -\pi i$ 是确定的，当 $\log(z_1 z_2) = 0$ 时，方程(1)显然成立.

注意，对上述 z_1，z_2

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = 0 \quad 且\ \mathrm{Log} z_1 + \mathrm{Log} z_2 = 2\pi i.$$

因此，一般情况下，表达式(1)中的 log 是不能被 Log 所代替的.

95

证明表达式

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2, \tag{4}$$

这里用跟式(1)同样的方法解释，留作练习.

我们在这儿介绍 $\log z$ 的其他两个性质，它在第 32 节将特别有用. 如果 z 是一非零复数，则对 $\log z$ 的任意值，有

$$z^n = e^{n\log z} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{5}$$

当 $n=1$ 时，上式就化为第 29 节中的关系式(3). 当把 z 写成 $z = re^{i\theta}$ 时，方程(5)两边变为

$r^n e^{in\theta}$，因此很容易就能得到证明．当 $z\neq0$ 时，

$$z^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{6}$$

也成立．即，上式右边有 n 个不同的值，它们是 z 的 n 次方根．为了证明这个结论，我们把 z 写成 $z=r\exp(i\Theta)$，这里 Θ 是 $\arg z$ 的主值，那么，根据第29节 $\log z$ 的定义(2)，

$$\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)=\exp\left[\frac{1}{n}\ln r+\frac{i(\Theta+2k\pi)}{n}\right],$$

这里 $k=0$，±1，±2，…．因此

$$\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)=\sqrt[n]{r}\exp\left[i\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{7}$$

因为只有当 $k=0$，1，…，$n-1$ 时，$\exp(i2k\pi/n)$ 有不同的值，所以(7)式右边仅有 n 个值．右边实际上也是 z 的 n 次方根的表达式(第8节)，因此可以写成 $z^{1/n}$．这就证明了性质(6)．实际上当 n 为负整数时，(6)也成立(参看下面练习中的第5题)．

练习

1．证明如果 $\mathrm{Re}\,z_1>0$，$\mathrm{Re}\,z_2>0$，则

$$\mathrm{Log}(z_1z_2)=\mathrm{Log}\,z_1+\mathrm{Log}\,z_2.$$

2．对任意两个非零复数 z_1，z_2

$$\mathrm{Log}(z_1z_2)=\mathrm{Log}\,z_1+\mathrm{Log}\,z_2+2N\pi i$$

这里 N 取值0，±1(与练习1做一下比较)．

3．采用以下方法证明第31节表达式(4)

96

(a)利用已知 $\arg(z_1/z_2)=\arg z_1-\arg z_2$(第7节)；

(b)从 $\log(1/z)$ 和 $-\log z$ 有相同的值集的意义上说明 $\log(1/z)=-\log z\,(z\neq0)$，然后参看第31节中 $\log(z_1z_2)$ 的表达式(1)．

4．通过选取特殊的非零值 z_1，z_2，证明第31节表达式(4)中的 log 被 Log 代替后不一定成立．

5．通过以下方法证明第31节性质(6)对负整数 n 成立．首先 $z^{1/n}=(z^{1/m})^{-1}\,(m=-n)$，这里 n 取任意负整数 $n=-1$，-2，…(参看第9节中的练习第9题)，其次性质(6)对任意正整数成立．

6．令 z 为非零复数，设为 $z=re^{i\Theta}\,(-\pi<\Theta\leqslant\pi)$，令 n 为任意固定的正整数($n=1$，2，…)．证明 $\log(z^{1/n})$ 的所有值可以通过以下方程给出

$$\log(z^{1/n})=\frac{1}{n}\ln r+i\frac{\Theta+2(pn+k)\pi}{n},$$

这里 $p=0$，±1，±2，…，；$k=0$，1，2，…，$n-1$．然后，由

$$\frac{1}{n}\log z=\frac{1}{n}\ln r+i\frac{\Theta+2q\pi}{n},$$

这里 $q=0$，±1，±2，…，证明 $\log(z^{1/n})$的值集与$(1/n)\log z$ 的值集相同. 因此证明了 $\log(z^{1/n})=(1/n)\log z$，这里相应于左边 $\log(z^{1/n})$的值，右边 $\log z$ 取适当的值. 反过来也是如此. (第 30 节练习 5(a)的结论就是这里的一种特殊情况.)

提示：利用一个正整数 n 除一个整数的余数为从 0 到 $n-1$ 的任意一个整数；即，当一个正整数 n 确定后，任何一个整数 q 能够写成 $q=pn+k$，这里 p 是一个整数，$k=0$，1，2，…，$n-1$.

32 复指数

当 $z\neq0$，指数 c 为任意复数时，函数 z^c 通过如下方程定义

$$z^c = e^{c\log z}, \tag{1}$$

这里 $\log z$ 表示多值对数函数. 方程(1)给出的 z^c 的定义有意义，当 $c=n$，($n=0$，±1，±2，…)与 $c=1/n$($n=0$，±1，±2，…)时，与原来的定义是一致的(参看第 31 节). 实际上，c 的这些特殊值的指数函数也就暗示了定义(1).

例 1 我们通过下面的例子说明，一般地，z 的幂是多值的. 由于

97

$$i^{-2i} = \exp(-2i\log i)$$

$$\log i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = i\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因此

$$i^{-2i} = \exp[(4n+1)\pi](n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{2}$$

注意 i^{-2i}的这些值都是实数.

由于指数函数具有性质 $1/e^z=e^{-z}$，因此

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{\exp(c\log z)} = \exp(-c\log z) = z^{-c}$$

特别地，$1/i^{2i}=i^{-2i}$. 根据表达式(2)，

$$\frac{1}{i^{2i}} = \exp[(4n+1)\pi] \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{3}$$

如果 $z=re^{i\theta}$，α 是任意实数，对数函数的分支

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r>0,\alpha<\theta<\alpha+2\pi)$$

在上述区域是单值解析的(参看第 30 节). 因此函数 $z^c=\exp(c\log z)$在该区域内是单值解析的. z^c 的这一分支的导数可以通过链式法则来求.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(c\log z) = \frac{c}{z}\exp(c\log z)$$

然后再根据等式 $z=\exp(\log z)$(第 29 节)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^c = c\,\frac{\exp(c\log z)}{\exp(\log z)} = c\exp[(c-1)\log z],$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^c = cz^{c-1} \quad (|z|>0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi). \tag{4}$$

当定义(1)中的 $\log z$ 被 $\mathrm{Log}\ z$ 代替后，我们得到 z^c 的主值：

$$\mathrm{P.V.}\ z^c = e^{c\mathrm{Log}z}. \tag{5}$$

98 方程(5)可以用来定义函数 z^c 在域 $|z|>0$，$-\pi<\mathrm{Arg}z<\pi$ 上的主值支.

例 2 $(-i)^i$ 的主值是

$$\exp[i\mathrm{Log}(-i)] = \exp\left[i\left(\ln 1 - i\frac{\pi}{2}\right)\right] = \exp\frac{\pi}{2}.$$

即

$$\mathrm{P.V.}\ (-i)^i = \exp\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

例 3 $z^{2/3}$的主值支可以写成

$$\exp\left(\frac{2}{3}\mathrm{Log}\ z\right) = \exp\left(\frac{2}{3}\ln r + \frac{2}{3}i\Theta\right) = \sqrt[3]{r^2}\exp\left(i\frac{2\Theta}{3}\right).$$

因此

$$\mathrm{P.V.}\ z^{2/3} = \sqrt[3]{r^2}\cos\frac{2\Theta}{3} + i\sqrt[3]{r^2}\sin\frac{2\Theta}{3}. \tag{7}$$

从第 22 节的理论中立即就能看出这个函数在定义域 $r>0$，$-\pi<\Theta<\pi$ 内解析.

根据定义(1)，c 为任意非零复常数，以 c 为底的指数函数可以写成

$$c^z = e^{z\log c}. \tag{8}$$

注意虽然根据定义(8)，e^z 一般情况下是多值的. 但我们一般是让对数取主值来解释 e^z 的，$\log e$ 的主值是唯一确定的.

当 $\log c$ 的值确定后，c^z 是 z 的整函数. 实际上，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}c^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^{z\log c} = e^{z\log c}\log c;$$

这就证明了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}c^z = c^z\log c. \tag{9}$$

练习

1. 证明当 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$,

(a) $(1+i)^i = \exp\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\exp\left(\frac{i}{2}\ln 2\right)$；　(b) $(-1)^{1/\pi} = e^{(2n+1)i}$.

2. 找出下列各个复数的主值：

(a) i^i；　(b) $\left[\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right]^{3\pi i}$；　(c) $(1-i)^{4i}$.

99

答案：(a)$\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$；　(b)$-\exp(2\pi^2)$；　(c)$e^{\pi}[\cos(2\ln 2)+i\sin(2\ln 2)]$.

3. 根据第 32 节 z^c 的定义，证明$(-1+\sqrt{3}i)^{3/2}=\pm 2\sqrt{2}$.

4. 证明第 3 题的结论能够通过以下方法得到

(a)首先找出$-1+\sqrt{3}i$ 的平方根，然后再利用$(-1+\sqrt{3}i)^{3/2}=[(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}]^3$；

(b)先算出$-1+\sqrt{3}i$，然后再利用$(-1+\sqrt{3}i)^{3/2}=[(-1+\sqrt{3}i)^3]^{1/2}$.

5. 证明第 8 节所定义的任意一个非零复数 z_0 的主 n 次方根与第 32 节中 ${z_0}^{1/n}$的主值相同.

6. 证明如果 $z\neq 0$，a 是实数，则 $|z^a|=\exp(a\ln|z|)=|z|^a$，这里 $|z|^a$ 取主值.

7. 令 $c=a+bi$ 是一个固定复数，这里 $c\neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，注意 i^c 是多值的，给常数 c 加上什么限制能使 $|i^c|$ 都相同?

答案：c 为实数.

8. 令 c，d，z 代表复数，$z\neq 0$. 证明如果下面所涉及的所有幂都取主值，则

(a)$1/z^c=z^{-c}$；　(b)$(z^c)^n=z^{cn}(n=1, 2, \cdots)$；

(c)$z^c z^d=z^{c+d}$；　(d)$z^c/z^d=z^{c-d}$.

9. 假设 $f'(z)$存在，推导 $c^{f(z)}$的导数公式.

33 三角函数

欧拉公式(第 6 节)告诉我们对任意实数 x，

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

从这些方程我们可以得到

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x \quad 和 \quad e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x.$$

即

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad 和 \quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

因此很自然地，定义一个复变量 z 的正弦函数和余弦函数如下：

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{1}$$

由于这些函数是整函数 e^{iz}和e^{-iz}的线性组合，因此它们都是整函数. 我们已经知道指数函数 e^{iz} 和 e^{-iz}的导数，再结合方程(1)，我们得到

100

$$\frac{d}{dz}\sin z=\cos z,\quad \frac{d}{dz}\cos z=-\sin z. \tag{2}$$

从定义(1)我们很容易看到

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z; \tag{3}$$

复变量的三角函数的一些其他等式也是显然成立的.

例 为了证明

$$2\sin z_1\cos z_2 = \sin(z_1+z_2)+\sin(z_1-z_2), \tag{4}$$

由定义(1)和指数函数的性质，有

$$2\sin z_1\cos z_2 = 2\left(\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2}\right).$$

右端乘起来可以化为

$$\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}+\frac{e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}}{2i},$$

或者

$$\sin(z_1+z_2)+\sin(z_1-z_2);$$

所以等式(4)成立.

等式(4)可以导出如下等式(参见下面练习中的第 3 题和第 4 题)

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \tag{5}$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2; \tag{6}$$

由上可知

$$\sin^2 z+\cos^2 z = 1, \tag{7}$$

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z,\quad \cos 2z = \cos^2 z-\sin^2 z, \tag{8}$$

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z,\quad \sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z. \tag{9}$$

当 y 是任意实数时，我们可以由定义(1)和微积分中的双曲函数

$$\sinh y = \frac{e^y-e^{-y}}{2},\quad \cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

得

101

$$\sin(iy) = i\sinh y,\quad \cos(iy) = \cosh y. \tag{10}$$

在等式(5)和(6)中，我们令 $z_1=x$，$z_2=iy$，则 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的实部和虚部很容易就能看出来：

$$\sin z = \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y, \tag{11}$$

$$\cos z = \cos x\cosh y-i\sin x\sinh y, \tag{12}$$

这里 $z=x+iy$.

从表达式(11)和(12)，我们能得到 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的一些重要性质. 比如，很明显地，这些函数的周期性质如下所示：

$$\sin(z+2\pi) = \sin z,\quad \sin(z+\pi) = -\sin z, \tag{13}$$

$$\cos(z+2\pi) = \cos z,\quad \cos(z+\pi) = -\cos z. \tag{14}$$

还有

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x+\sinh^2 y, \tag{15}$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x+\sinh^2 y. \tag{16}$$

因为当 $y\to\infty$ 时 $\sinh y\to\infty$ 从上面两个方程可以看出 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在复平面上是无界的，而对任

意 x，$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$（参看第 17 节结尾的有界的定义）.

若存在 z_0，使 $f(z_0)=0$，则 z_0 称为 $f(z)$ 的零点．由于当 z 为实数时，$\sin z$ 就变为微积分中的普通的正弦函数，所以实数 $z=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是 $\sin z$ 的零点．为了说明 $\sin z$ 没有其他零点，我们令 $\sin z=0$，由方程(15)有

$$\sin^2 x+\sinh^2 y=0.$$

因此

$$\sin x=0 \quad 和 \quad \sinh y=0.$$

所以 $x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，$y=0$；即

$$\sin z=0 \text{ 的充要条件是 } z=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{17}$$

由于

$$\cos z=-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right),$$

根据等式(9)的第二个，$\cos z=0$ 的充要条件是

$$z=\frac{\pi}{2}+n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{18}$$

因此，和 $\sin z$ 一样，$\cos z$ 的零点也都是实数. [102]

其他的四个三角函数可以根据它们与正弦、余弦的关系来定义：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, \tag{19}$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}. \tag{20}$$

注意 $\cos z$ 的零点

$$z=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

是 $\tan z$ 和 $\sec z$ 的奇点（第 23 节），因此 $\tan z$ 和 $\sec z$ 在除了这些点外处处解析．同样，$\sin z$ 的零点

$$z=n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

是 $\cot z$ 和 $\csc z$ 的奇点．对等式(19)和(20)右边求导，我们得到公式

$$\frac{d}{dz}\tan z=\sec^2 z,\quad \frac{d}{dz}\cot z=-\csc^2 z, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dz}\sec z=\sec z\tan z,\quad \frac{d}{dz}\csc z=-\csc z\cot z. \tag{22}$$

根据等式(13)和(14)，由(19)和(20)定义的三角函数的周期是很显然的．例如，

$$\tan(z+\pi)=\tan z. \tag{23}$$

映射 $w=\sin z$ 的性质在以后的应用中是很重要的．在以后的第 89 节（第 8 章）将涉及这些.

练习

1. 详细写出第 33 节中表达式(2) $\sin z$ 和 $\cos z$ 的导数公式.

2. 证明欧拉公式(第 6 节)中 θ 被 z 代替后仍然成立：

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

提示：从右边着手验证.

3. 在第 33 节中交换等式(4)中的 z_1 和 z_2 的位置，把得到的等式与等式(4)的两边相加导出 $\sin(z_1+z_2)$的表达式(5).

103

4. 根据第 33 节的等式(5)，

$$\sin(z+z_2) = \sin z\cos z_2 + \cos z\sin z_2.$$

两边对 z 求导，然后令 $z=z_1$，得到 $\cos(z_1+z_2)$的表达式(6).

5. 用以下方法证明第 33 节等式(7)：

(a)本节中的等式(6)和关系式(3)；

(b)第 26 节的引理和整函数

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$$

在 x 轴上有零值.

6. 说明第 33 节中怎样从等式(5)和(6)得到三角等式(8)和(9).

7. 用第 33 节的等式(7)证明

(a) $1+\tan^2 z=\sec^2 z$；　(b) $1+\cot^2 z=\csc^2 z$.

8. 证明第 33 节的导数公式(21)和(22).

9. 在第 33 节中应用表达式(11)和(12)导出表达式(15)、(16).

提示：利用等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 和 $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$.

10. 指出怎样由第 33 节中有关 $|\sin z|^2$ 和 $|\cos z|^2$ 的表达式(15)和(16)得到

(a) $|\sin z| \geqslant |\sin x|$；　(b) $|\cos z| \geqslant |\cos x|$.

11. 利用第 33 节中有关 $|\sin z|^2$ 和 $|\cos z|^2$ 的表达式(15)和(16)证明

(a) $|\sinh y| \leqslant |\sin z| \leqslant \cosh y$；　(b) $|\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$.

12. (a)利用第 33 节中有关 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义(1)证明

$$2\sin(z_1+z_2)\sin(z_1-z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1.$$

(b)利用上面得到的等式，证明如果 $\cos z_1=\cos z_2$，则 z_1+z_2 和 z_1-z_2 至少有一个是 2π 的整数倍.

13. 利用第 20 节中的柯西-黎曼方程证明 $\sin\bar{z}$ 和 $\cos\bar{z}$ 在 z 平面上处处不解析.

14. 利用第 27 节的原理证明，对所有的 z，

(a) $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$；　(b) $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$.

104

15. 利用第 33 节的表达式(11)和(12)对练习 14 所得的关系式给出一个简单的证明.

16. 证明

(a)对所有的 z 有$\overline{\cos(iz)}=\cos(i\bar{z})$；

(b)$\overline{\sin(iz)}=\sin(i\bar{z})$当且仅当 $z=n\pi i(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

17. 令 $\sin z$ 和 $\cosh 4$ 的实部和虚部相等来找出方程 $\sin z=\cosh 4$ 的所有根.

答案：$\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\pm 4i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

18. 找出方程 $\cos z=2$ 的所有根.

答案：$2n\pi+i\cosh^{-1}2$ 或 $2n\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3}) \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

34 双曲函数

复变量的双曲正弦和双曲余弦可以和实变量的双曲正弦和双曲余弦一样定义，即

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}. \tag{1}$$

由于 e^z 和 e^{-z} 都是整函数，由(1)知 $\sinh z$ 和 $\cosh z$ 也是整函数. 而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sinh z=\cosh z,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh z=\sinh z. \tag{2}$$

由指数函数在定义(1)和第 33 节 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

中出现的方式，知双曲正弦和双曲余弦和这些三角函数之间有密切的关系：

$$-i\sinh(iz)=\sin z,\quad \cosh(iz)=\cos z, \tag{3}$$

$$-i\sin(iz)=\sinh z,\quad \cos(iz)=\cosh z. \tag{4}$$

下面是一些有关双曲正弦和双曲余弦的用得更广泛的等式

$$\sinh(-z)=-\sinh z,\quad \cosh(-z)=\cosh z, \tag{5}$$

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1, \tag{6}$$

$$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2, \tag{7}$$

$$\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2, \tag{8}$$

105

和

$$\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y, \tag{9}$$

$$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y, \tag{10}$$

$$|\sinh z|^2=\sinh^2 x+\sin^2 y, \tag{11}$$

$$|\cosh z|^2=\sinh^2 x+\cos^2 y, \tag{12}$$

这里 $z=x+iy$. 这些等式可以由定义(1)直接得到，然而利用关系式(3)和(4)更容易得到.

例 为了说明我们刚才所提示的证明方法，我们来证一下等式(11). 根据关系式(4)的第一个，$|\sinh z|^2=|\sin(iz)|^2$. 即

$$|\sinh z|^2=|\sin(-y+ix)|^2, \tag{13}$$

这里 $z=x+iy$. 但是由第 33 节等式(15)我们知道

$$|\sin(x+iy)|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y;$$

这就证明了等式(11).

考虑到 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的周期，再结合关系式(4)，$\sinh z$ 和 $\cosh z$ 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数. 关系式(4)还说明了

$$\sinh z=0 \text{ 的充要条件是 } z=n\pi i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{14}$$

$$\cosh z=0 \text{ 的充要条件是 } z=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{15}$$

z 的双曲正切是通过以下等式来定义的

$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z} \tag{16}$$

它在 $\cosh z\neq0$ 的任意区域内解析. 函数 $\coth z$、$\mathrm{sech}\, z$、$\mathrm{csch}\, z$ 分别是函数 $\tanh z$、$\cosh z$、$\sinh z$ 的倒数. 下面的求导公式在微积分中对实变量的函数是成立的，很容易证明它们对复变量 z 也成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tanh z=\mathrm{sech}^2 z,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\coth z=-\mathrm{csch}^2 z, \tag{17}$$

106

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{sech}\, z=-\mathrm{sech}\, z\tanh z,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{csch}\, z=-\mathrm{csch}\, z\coth z. \tag{18}$$

练习

1. 证明第 34 节等式(2)所提到的 $\sinh z$ 和 $\cosh z$ 的导数.

2. 通过以下方法证明 $\sinh 2z=2\sinh z\cosh z$

(a)第 34 节 $\sinh z$，$\cosh z$ 的定义(1)；

(b)第 33 节的等式 $\sin 2z=2\sin z\cos z$ 和第 34 节的关系式(3).

3. 说明如何分别由第 33 节的等式(7)和(6)得到第 34 节的等式(6)和(8).

4. 结合 $\sinh z=\sinh(x+iy)$，$\cosh z=\cosh(x+iy)$ 说明如何分别由第 34 节的等式(7)和(8)得到等式(9)和(10).

5. 证明第 34 节关于 $|\cosh z|^2$ 的表达式(12).

6. 采用以下方法证明 $|\sinh x|\leqslant|\cosh z|\leqslant\cosh x$

(a)第 34 节式(12)；

(b)第 33 节练习 11(b)得到的不等式 $|\sinh y|\leqslant|\cos z|\leqslant\cosh y$.

7. 证明

(a) $\sinh(z+\pi i)=-\sinh z$；

(b) $\cosh(z+\pi i)=-\cosh z$；

(c) $\tanh(z+\pi i)=\tanh z$.

8. 详细说明为什么第 34 节中式(14)和(15)成立.

9. 利用上题得到的结论找出双曲正切的所有零点和奇点.

10. 推导第 34 节的求导公式(17).

11. 利用第 27 节的反射原理证明，对任意的 z，

(a) $\overline{\sinh z}=\sinh\bar{z}$； (b) $\overline{\cosh z}=\cosh\bar{z}$.

12. 利用上题得到的结果证明在 $\cosh\neq 0$ 的任意点，有 $\overline{\tanh z}=\tanh\bar{z}$.

13. 利用第 26 节的引理并且假设所给等式中的 z 被 x 代替后仍然成立，证明

(a) $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$； (b) $\sinh z+\cosh z=e^z$.

(与第 33 节练习 5(b) 做一下比较)

14. 为什么函数 $\sinh(e^z)$ 是整函数？用 x 和 y 把它的实部表示出来，说明为什么它的实部作为一个函数处处调和.

15. 利用第 34 节的等式(9)或(10)像第 33 节的练习 17 一样找出下列方程的所有根

(a) $\sinh z=i$； (b) $\cosh z=\dfrac{1}{2}$.

答案：(a) $\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi i\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$； (b) $\left(2n\pm\dfrac{1}{3}\right)\pi i\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$. [107]

16. 找出方程 $\cosh z=-2$ 的所有根(与第 33 节练习 18 做一下比较).

答案：$\pm\ln(2+\sqrt{3})+(2n+1)\pi i\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$.

35 反三角函数和反双曲函数

三角函数和双曲函数的反函数可以通过对数来描述.

为了定义反正弦函数 $\sin^{-1}z$，

$$\text{当 } z=\sin w \quad \text{时，令 } w=\sin^{-1}z$$

即当

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

时，令 $w=\sin^{-1}z$. 如果我们把这个等式写成 e^{iw} 的二次方程的形式

$$(e^{iw})^2-2iz(e^{iw})-1=0,$$

把 e^{iw} 解出来(参看第 9 节练习 8(a))，我们发现

$$e^{iw}=iz+(1-z^2)^{1/2}, \tag{1}$$

这里 $(1-z^2)^{1/2}$ 是 z 的双值函数. 方程(1)的两边取对数再结合 $w=\sin^{-1}z$，我们得到表达式

$$\sin^{-1}z=-i\log[iz+(1-z^2)^{1/2}]. \tag{2}$$

下面的例子说明 $\sin^{-1}z$ 是多值函数，在每一点 z 有无穷多个值.

例 表达式(2)告诉我们

$$\sin^{-1}(-i)=-i\log(1\pm\sqrt{2}).$$

但是

$$\log(1+\sqrt{2})=\ln(1+\sqrt{2})+2n\pi i \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$\log(1-\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2}-1)+(2n+1)\pi i \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

[108]

由于

$$\ln(\sqrt{2}-1)=\ln\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-\ln(1+\sqrt{2}),$$

所以

$$(-1)^n\ln(1+\sqrt{2})+n\pi i \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

构成 $\log(1\pm\sqrt{2})$ 的值集. 因此在直角坐标下，有

$$\sin^{-1}(-i)=n\pi+i(-1)^{n+1}\ln(1+\sqrt{2}) \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

我们可以用推导表达式(2)的方法导出

$$\cos^{-1}z=-i\log[z+i(1-z^2)^{1/2}] \tag{3}$$

$$\tan^{-1}z=\frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}. \tag{4}$$

函数 $\cos^{-1}z$ 和 $\tan^{-1}z$ 也都是多值的. 当平方根和对数函数取特殊的分支的时候，因为这三个反函数都是解析函数的复合代数运算，所以它们也是单值解析的.

由上也很容易得到这三个函数的导数. 前两个函数的导数取决于所选的平方根的值：

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1}z=\frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1}z=\frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}. \tag{6}$$

第三个的导数

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1}z=\frac{1}{1+z^2}, \tag{7}$$

不依赖于这个函数取单值的方式.

双曲函数的反函数也可以用同样的方式来得到. 结果是

$$\sinh^{-1}z=\log[z+(z^2+1)^{1/2}], \tag{8}$$

$$\cosh^{-1}z=\log[z+(z^2-1)^{1/2}], \tag{9}$$

109

$$\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}. \tag{10}$$

最后，我们注意的是一般对反函数的另一个通用的表达式是 $\arcsin z$，等等.

练习

1. 找出下列函数的所有值

(a) $\tan^{-1}(2i)$； (b) $\tan^{-1}(1+i)$； (c) $\cosh^{-1}(-1)$； (d) $\tanh^{-1}0$.

答案：(a) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{i}{2}\ln3\,(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$； (d) $n\pi i\,(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

2. 通过如下方法解方程 $\sin z=2$

(a)让方程中的实部和实部相等，虚部和虚部相等；

(b)运用第 35 节 $\sin^{-1}z$ 的表达式(2).

答案：$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$ ($n=0$，±1，±2，…).

3. 解方程 $\cos z=\sqrt{2}$.
4. 推导第 35 节 $\sin^{-1}z$ 的导数公式(5).
5. 推导第 35 节 $\tan^{-1}z$ 的表达式(4).
6. 推导第 35 节 $\tan^{-1}z$ 的导数公式(7).
7. 推导第 35 节的 $\cosh^{-1}z$ 的表达式(9).

110

第4章 积 分

积分在复变函数的学习中有着极其重要的地位. 在本章中，我们将展现积分理论优雅而严谨的特征，所描述的定理都非常简练而深刻，但大多数的证明很简单.

36 函数 $w(t)$ 的导数

为了用一种简单的方法来介绍 $f(z)$ 的积分，我们需要先考虑实变量 t 的复值函数 w 的导数. 我们记

$$w(t) = u(t) + iv(t), \tag{1}$$

其中函数 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是 t 的实值函数. 函数(1)在一点 t 的导数 $w'(t)$ 或 $d[w(t)]/dt$ 可定义为

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t), \tag{2}$$

其中假设在 t 点 u' 和 v' 都存在.

由定义(2)可得对每个复常数 $z_0 = x_0 + iy_0$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_0 w(t)] &= [(x_0 + iy_0)(u + iv)]' = [(x_0 u - y_0 v) + i(y_0 u + x_0 v)]' \\ &= (x_0 u - y_0 v)' + i(y_0 u + x_0 v)' = (x_0 u' - y_0 v') + i(y_0 u' + x_0 v').\end{aligned}$$

但

$$(x_0 u' - y_0 v') + i(y_0 u' + x_0 v') = (x_0 + iy_0)(u' + iv') = z_0 w'(t),$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_0 w(t)] = z_0 w'(t). \tag{3}$$

另一个我们将会常常用到的希望成立的法则是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}, \tag{4}$$

其中 $z_0 = x_0 + iy_0$. 为了验证上式，我们将函数写成

$$e^{z_0 t} = e^{x_0 t} e^{iy_0 t} = e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t$$

并由定义(2)可见

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{z_0 t} = (e^{x_0 t} \cos y_0 t)' + i(e^{x_0 t} \sin y_0 t)'.$$

根据微积分中的一些熟悉的法则和一些简单的代数运算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{z_0 t} = (x_0 + iy_0)(e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t),$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{z_0 t} = (x_0 + iy_0)e^{x_0 t}e^{iy_0 t}.$$

显然这就得到了式(4).

在微积分中学到的其他各种法则，如函数之和与函数之积的求导法则，对上面的复值函数依然奏效. 像公式(3)和公式(4)那样，利用微积分中的对应法则就可以验证. 然而，应该指出并不是所有在微积分中成立的法则都对(1)型的函数成立. 下面的例子阐明了这一点.

例 设 $w(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续；即它的实部 $u(t)$和虚部 $v(t)$都在这区间上连续. 即使当 $a<t<b$ 时 $w'(t)$存在，微分中值定理也不再成立. 更清楚地说就是，不一定存在数 c 在区间 $a<t<b$ 上满足

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a}.$$

只需考虑函数 $w(t)=e^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$就可以看到这一点. 此时 $|w'(t)| = |ie^{it}| = 1$；这意味着 $w'(t)$恒不为零，而 $w(2\pi)-w(0)=0$.

112

37 函数 $w(t)$的定积分

当 $w(t)$为实变量 t 的复值函数时，记为

$$w(t) = u(t) + iv(t), \tag{1}$$

其中函数 $u(t)$和 $v(t)$是 t 的实值函数，$w(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的定积分定义为

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

上式前提是右边的两个积分都存在. 因此有

$$\mathrm{Re}\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}[w(t)]\mathrm{d}t \quad 和 \quad \mathrm{Im}\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Im}[w(t)]\mathrm{d}t. \tag{3}$$

例 1 为了说明定义(2)，

$$\int_0^1 (1+it)^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)\mathrm{d}t + i\int_0^1 2t\mathrm{d}t = \frac{2}{3} + i.$$

用同样的办法可以定义在无界区间上 $w(t)$的广义积分. 定义(2)中 $u(t)$和 $v(t)$分段连续时，它们的积分就存在. 其中分段连续指函数在给定区间上除了有限个点外处处连续，且在这有限个不连续点上存在单边极限. 当然，在 a 点只要求右极限存在；在 b 点只要求左极限存在. 当 $u(t)$和$v(t)$都分段连续时，则说 $w(t)$是分段连续的.

关于函数 $w(t)$的常数倍的积分、函数和的积分、交换极限与积分次序的法则都是成立的. 这些法则还有性质

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_a^c w(t)\mathrm{d}t + \int_c^b w(t)\mathrm{d}t,$$

都很容易利用微积分中的相应法则得到验证.

关于有原函数的微积分基本定理也能推广，使得对(2)型的积分也是成立的. 特别地，设

113

$$w(t) = u(t) + iv(t) \text{ 和 } W(t) = U(t) + iV(t)$$

在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续．若 $W'(t)=w(t)(a\leqslant t\leqslant b)$，那么 $U'(t)=u(t)$，$V'(t)=v(t)$．于是从定义(2)得

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = U(t)\Big|_a^b + iV(t)\Big|_a^b$$
$$= [U(b)+iV(b)]-[U(a)+iV(a)].$$

即

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = W(b)-W(a) = W(t)\Big|_a^b. \tag{4}$$

例 2　由于 $(e^{it})'=ie^{it}$（见 36 节），

$$\int_0^{\pi/4} e^{it}\mathrm{d}t = -ie^{it}\Big|_0^{\pi/4} = -ie^{i\pi/4}+i$$
$$= -i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+i = \frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

我们最后给出积分模的一个重要性质．即

$$\left|\int_a^b w(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |w(t)|\,\mathrm{d}t \quad (a\leqslant b). \tag{5}$$

这个不等式当左边积分值为零时显然成立，特别当 $a=b$ 时．因此在验证这个式子时，我们假设它的值是非零复数．如果 r_0 和 θ_0 分别是常数的模和幅角，那么

$$\int_a^b w\mathrm{d}t = r_0 e^{i\theta_0}.$$

解出 r_0，得

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w\mathrm{d}t. \tag{6}$$

等式的左边是实数，故右边也是．因此，利用实数的实部是它本身和性质(3)，我们得到(6)式的右边可以写成

$$\int_a^b e^{-i\theta_0} w\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int_a^b e^{-i\theta_0} w\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta_0} w)\mathrm{d}t.$$

114

那么等式(6)变为

$$r_0 = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta_0} w)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

但

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta_0} w) \leqslant |e^{-i\theta_0} w| = |e^{-i\theta_0}|\,|w| = |w|;$$

因此根据等式(7)，

$$r_0 \leqslant \int_a^b |w|\,\mathrm{d}t.$$

因为 r_0 就是(5)的左边，所以(5)式成立．将上面过程稍微修改就可得到

$$\left|\int_a^{\infty} w(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{\infty} |w(t)| \mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中假定广义积分存在.

练习

1. 利用微积分中的相应法则验证当

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

是实变量 t 的复值函数且 $w'(t)$ 存在时，下列法则成立：

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(-t) = -w'(-t)$，其中 $w'(-t)$ 表示 $w(t)$ 在 $-t$ 点的导数；

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[w(t)]^2 = 2w(t)w'(t)$.

2. 计算下列积分：

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 \mathrm{d}t$； (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{i2t}\mathrm{d}t$； (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}\mathrm{d}t(\mathrm{Re}z > 0)$.

答案：(a) $-\dfrac{1}{2} - i\ln 4$； (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4}$； (c) $\dfrac{1}{z}$.

3. 证明如果 m 和 n 是整数，那么

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, 若\ m \neq n \\ 2\pi, 若\ m = n \end{cases}$$

4. 根据第 37 节中的关于一个实变量的复值函数的积分定义(2)，

115

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^x \cos x \mathrm{d}x + i\int_0^{\pi} e^x \sin x \mathrm{d}x.$$

通过计算左边积分的值并取其实部和虚部来求右边的两积分值.

答案：$-(1+e^{\pi})/2$， $(1+e^{\pi})/2$.

5. 设 $w(t)$ 是定义在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续复值函数．通过考虑函数 $w(t) = e^{it}$ 来证明不一定存在区间 $a < t < b$ 上的数 c 使得

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = w(c)(b-a).$$

这表明微积分中的积分中值定理对复值函数不一定成立(与第 36 节中的例子做比较).

6. 设 $w(t) = u(t) + iv(t)$ 表示定义在区间 $-a \leqslant t \leqslant a$ 上的连续复值函数.

(a)设 $w(t)$ 是偶函数；即 $w(-t) = w(t)$ 对区间上任一点 t 都成立．证明

$$\int_{-a}^{a} w(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a w(t)\mathrm{d}t.$$

(b)证明如果 $w(t)$ 是奇函数即 $w(-t) = -w(t)$ 对区间上任一点 t 都成立，那么

$$\int_{-a}^{a} w(t)\mathrm{d}t = 0.$$

提示：利用相应的实值奇偶函数的积分性质.

7. 应用第 37 节中的不等式(5)来证明对于区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的所有 x 值，函数[1].

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\mathrm{d}\theta\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

满足不等式 $|P_n(x)|\leqslant 1$.

38 围道

一个复变量的复值函数的积分是定义在复平面中的曲线上的，而不仅仅限于实区间. 为了学习这种积分，在这节中将介绍几类曲线. 116

复平面上由 $z=(x, y)$ 组成的点集称为一条弧，如果

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b),\tag{1}$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是实参数 t 的连续函数. 这个定义给出了一个从区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 到 xy 或 z 平面的一个连续映射；且像点随 t 的增长是有向的. 用下面的等式来描述弧是很方便的：

$$z=z(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b),\tag{2}$$

其中

$$z(t)=x(t)+iy(t).\tag{3}$$

弧 C 称为简单弧或若尔当弧[2]，如果这条弧不自相交；即 C 是简单的，如果 $t_1\neq t_2$ 时就有 $z(t_1)\neq z(t_2)$. 当弧 C 除了满足 $z(b)=z(a)$ 外是简单的话，我们就称 C 是简单闭曲线或若尔当曲线.

有的特别的弧的几何性质使得(2)中的参数 t 要有不同的表示. 事实上，可以看下面的例子.

例 1　第 10 节中的由下式决定的折线

$$z=\begin{cases}x+ix,若\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+i\ ,若\ 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\tag{4}$$

是由 0 到 $1+i$ 的线段和 $1+i$ 到 $2+i$ 的线段连接起来的(图 36)一条简单弧.

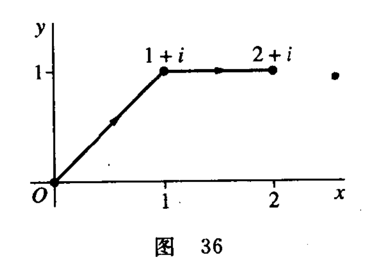


图　36

例 2　以原点为圆心的单位圆

$$z=e^{i\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\tag{5}$$

117

[1] 这些函数实际上是多项式，它们称为勒让德多项式，在应用数学中很重要. 例如，参看附录 A 中 Lebedev 写的书的第 4 章.

[2] 用 C. Jordan(1838－1922)的姓命名.

是一条逆时针方向的简单闭曲线. 同样以 z_0 为圆心半径为 R 的圆

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{6}$$

也是一条逆时针方向的简单闭曲线(见第 6 节).

同样的点集能组成不同的弧.

例 3 弧

$$z = e^{-i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{7}$$

与式(5)描述的弧是不同的. 点集是相同的, 但这个圆是沿顺时针方向的.

例 4 弧

$$z = e^{i2\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{8}$$

上的点与构成(5)和(7)的点是相同的. 但这条弧的不同之处在于它沿圆周逆时针方向转了两次.

当然对任何给定的弧, 其参数方程表示是不唯一的. 实际上可以通过变量的替换将参数的取值范围定在其他任何区间上. 具体说来, 设函数

$$t = \phi(\tau) \quad (\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta) \tag{9}$$

是将区间 $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ 映到 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的实值函数(见图 37). 我们假设 ϕ 的一阶导数连续. 又设对任何 τ 均有 $\phi'(\tau)>0$; 这保证了 t 是随 τ 递增的. 表达式(2)经过映射(9)变为

$$z = Z(\tau) \quad (\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta) \tag{10}$$

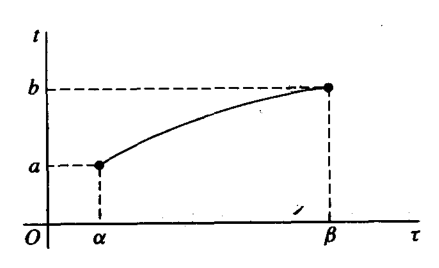


图 37 $t=\phi(\tau)$

118

其中

$$Z(\tau) = z[\phi(\tau)]. \tag{11}$$

在练习 3 中我们给出了一个具体的函数说明了这个问题.

现设用于表示 C 的函数(3)的导数

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \tag{12}$$

的实部 $x'(t)$ 和虚部 $y'(t)$ 在整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的. 那么这条弧就称为**可微弧**, 且实值函数

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上可积. 事实上根据微积分中弧长的定义得, C 的长度是

$$L = \int_a^b | z'(t) | \mathrm{d}t. \tag{13}$$

如我们所希望的，在 C 表达式做参数映射时，L 的值不变．更明确地说，当用(9)式做变量替换时，(13)式将变为[见练习 1(b)]

$$L = \int_\alpha^\beta | z'[\phi(\tau)] | \phi'(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

如果对 C 用表达式(10)，那么由其导数(练习 4)

$$Z'(t) = z'[\phi(\tau)]\phi'(\tau) \tag{14}$$

就可将(13)写成

$$L = \int_\alpha^\beta | Z'(\tau) | \mathrm{d}\tau.$$

因此 C 的表达使用(10)式，其长度保持不变．

如果(2)表示一条可微弧且在区间 $a<t<b$ 上处处都有 $z'(t)\neq 0$，那么单位切向量

$$\boldsymbol{T} = \frac{z'(t)}{| z'(t) |}$$

对开区间上的所有 t 都有定义，且倾角为 $\arg z'(t)$．在区间 $a<t<b$ 上 $\boldsymbol{T}$ 是随参数 t 的变化而连续转动的．当 $z(t)$ 看作是径向量时，$\boldsymbol{T}$ 的这种表达式正是在微积分中出现过的形式．这样的弧称为是光滑的．在提到光滑弧 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 时，我们就认为 $z'(t)$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续且在 $a<t<b$ 上不为零．　119

一条围道或分段光滑弧是指一条由有限条光滑弧在端点连接起来后得到的弧．于是如果(2)表示一条围道，那么 $z(t)$ 是连续的，且 $z'(t)$ 是分段连续的．例如折线(4)就是一条围道．当 $z(t)$ 只有在起点和终点的值相同时围道 C 就叫做简单闭围道．例如(5)和(6)及给定方向的矩形或三角形．一条围道或简单闭围道的长度为组成这条弧的光滑弧长度之和．

任何一条简单闭曲线或简单闭围道上的点都是两个互不相交的区域的边界点．一个区域在 C 内部且有界．另外一个在 C 外无界．从几何上很明显可以接受这个事实即若尔当曲线定理；但严格证明不容易[⊖]．

练习

1. 证明如果 $w(t)=u(t)+iv(t)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续，那么

(a) $\int_{-b}^{-a} w(-t)\mathrm{d}t = \int_a^b w(\tau)\mathrm{d}\tau$；

(b) $\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta w[\phi(\tau)]\phi'(\tau)\mathrm{d}\tau$，其中 $\phi(\tau)$ 是第 38 节中式(9)中的函数．

提示：这些等式可以通过验证它们对实值函数成立而得到．

2. 设 C 表示圆周 $|z|=2$ 的右半部分，用逆时针方向为正，C 有下面两个参数表达式是

⊖ 参看 Newman 的书 115－116 页，或参看 Thron 的书的第 13 节，这些书的书名在本书的附录 A 中已列出．对 C 是简单多边形这一特殊情况，在 Hille 的论文集的第一卷的 281－285 页中有证明，此卷书名在本书的附录 A 中也已列出．

$$z = z(\theta) = 2e^{i\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

120

$$z = Z(y) = \sqrt{4-y^2} + iy \quad (-2 \leqslant y \leqslant 2).$$

试验证 $Z(y)=z[\phi(y)]$，其中

$$\phi(y) = \arctan\frac{y}{\sqrt{4-y^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arctan t < \frac{\pi}{2}\right).$$

并证明 ϕ 满足第 38 节(9)所要求的存在正导数.

3. 推导出如图 37 中在 τt 平面上过点(α, a)和点(β, b)的直线的方程. 利用它找出 38 节(9)式中用到的线性函数 $\phi(\tau)$，在那里这个函数是用来将(2)变为(10)的.

答案：$\phi(\tau)=\dfrac{b-a}{\beta-\alpha}\tau+\dfrac{a\beta-b\alpha}{\beta-\alpha}$.

4. 对 $Z(\tau)=z[\phi(\tau)]$的微分来验证 38 节中的式(14).

提示：记 $Z(\tau)=x[\phi(\tau)]+iy[\phi(\tau)]$，再利用实值函数的链式法则.

5. 设函数 $f(z)$在光滑弧 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$上一点 $z_0=z(t_0)$处解析. 证明如果 $w(t)=f[z(t)]$，那么在 $t=t_0$ 点有

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t).$$

提示：记 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$及 $z(t)=x(t)+iy(t)$，那么

$$w(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)].$$

然后利用微积分中两个实变量的函数的链式法则得

$$w' = (u_x x' + u_y y') + i(v_x x' + v_y y'),$$

再利用柯西-黎曼方程.

6. 设 $y(x)$是定义在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的实值函数，表达式如下

$$y(x) = \begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), 若\ 0 < x \leqslant 1 \\ 0, 若\ x = 0 \end{cases}$$

(a)证明方程

$$z = x + iy(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

表示一条如图 38 所示的与实轴交于点 $z=1/n(n=1, 2, \cdots)$和 $z=0$ 的弧 C.

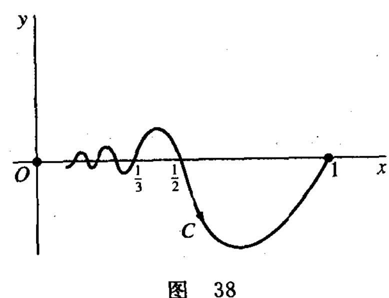


图 38

(b)验证(a)中的弧 C 是一条光滑弧.

提示：为证明 $y(x)$在 $x=0$ 的连续性，只需注意到 $x>0$ 时

$$0 \leqslant \left| x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leqslant x^3.$$

同样由此可得到 $y'(0)$及 $y'(x)$在 $x=0$ 的光滑性.

39　围道积分

现在我们来研究复变量 z 的复值函数 f 的积分. 这样的积分一般是用 $f(z)$沿复平面上给定的从 $z=z_1$ 到 $z=z_2$ 的围道 C 的值来定义的. 因此是一个线积分；它的值依赖于围道 C 和函数 f. 记作

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z \quad \text{或} \quad \int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z,$$

一般后一记号常在积分的值不依赖于连接两端点的围道的选择时使用. 当积分可以直接定义为和的极限时，我们就用 37 节中介绍的定积分来定义.

设

$$z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

表示围道 C，从点 $z_1=z(a)$到点 $z_2=z(b)$. 设 $f(z)$在 C 上是分段连续的，即 $f[z(t)]$是区间$(a\leqslant t\leqslant b)$上的分段连续函数. 我们定义 f 沿 C 的围道积分如下

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

注意，由于 C 是一条围道，所以 $z'(t)$在$(a\leqslant t\leqslant b)$是分段连续的；故(2)的积分的存在性得以保证.

121
～
122

围道积分的值在对围道的表达式做如 38 节(11)型的映射时是不变的. 这个论证过程只需仿照 38 节中证明弧长的不变时的过程即可. 从定义(2)和 37 节中提到的复值函数积分的性质立即可得对任意复常数 z_0，

$$\int_C z_0 f(z)\mathrm{d}z = z_0\int_C f(z)\mathrm{d}z, \tag{3}$$

及

$$\int_C [f(z)+g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_C g(z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

与积分(2)中用到的围道 C 相关联的是围道$-C$，它与围道 C 的点集是相同的，但是方向与 C 相反，是从 z_2 到 z_1(图 39). 围道$-C$ 有参数表示

$$z = z(-t) \quad (-b \leqslant t \leqslant -a);$$

并且从 37 节练习 1(a)的观点来看，

$$\int_{-C} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(-t)\mathrm{d}t = -\int_{-b}^{-a} f[z(-t)]z'(-t)\mathrm{d}t,$$

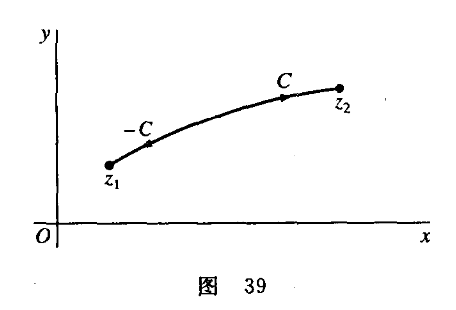


图 39

其中 $z'(-t)$表示 t 的函数 $z(t)$的导数在 $-t$ 的值. 在最后的积分中做映射 $\tau=-t$，然后由 38 节练习 1(a)可得

$$\int_{-C} f(z)\mathrm{d}z = -\int_b^a f[z(\tau)]z'(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

也就是

$$\int_{-C} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z. \tag{5}$$

现在考虑表达式如(1)的一条路径 C，它由从 z_1 到 z_2 的围道 C_1 与从 z_2 到 z_3 的围道 C_2 连接而成(图 40). 存在 c，满足 $a<c<b$，使得 $z(c)=z_2$. 那么，C_1 可表示为

123

$$z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant c)$$

而 C_2 可表示为

$$z = z(t) \quad (c \leqslant t \leqslant b).$$

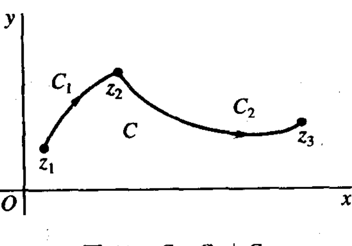


图 40 $C=C_1+C_2$

而且由 37 节中提到的 $w(t)$的积分法则得

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

那么很明显地有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z. \tag{6}$$

有时 C 叫做 C_1 和 C_2 的和，记为 C_1+C_2. 当围道 C_1 和 C_2 有相同的终点时，可以定义 C_1 和 $-C_2$ 的和，记为 C_1-C_2.

在微积分中定义的积分的几何意义可以解释为面积或其他东西．但在复平面上的积分除了特殊情况外，一般没有什么有意义的几何或物理上的解释．

40　举例

这节的目的是针对 39 节中的积分的定义给出例子并说明那里提到的积分的性质．我们将在 42 节中用 $f(z)$在围道上的积分讲述原函数的概念．

124

例 1　求下面积分的值：

$$I=\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

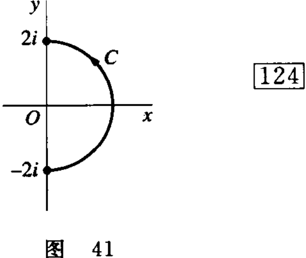


图　41

其中 C 是圆周 $|z|=2$ 上从 $z=-2i$ 到 $z=2i$ 的右半部分(图 41)：

$$z=2e^{i\theta}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

根据 39 节定义(2)，

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\overline{2e^{i\theta}}(2e^{i\theta})'\mathrm{d}\theta;$$

由于

$$\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}\quad 且\quad (e^{i\theta})'=ie^{i\theta},$$

就得到

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2e^{-i\theta}2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=4i\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta=4\pi i.$$

注意到当 z 在圆周 $|z|=2$ 上时，就有 $z\bar{z}=4$ 或 $\bar{z}=4/z$．于是 $I=4\pi i$ 可写成

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z}=\pi i. \tag{2}$$

例 2　在本例中，我们用 C_1 表示图 42 中的围道 OAB 并计算积分

$$\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\int_{OA}f(z)\mathrm{d}z+\int_{AB}f(z)\mathrm{d}z, \tag{3}$$

其中

$$f(z)=y-x-i3x^2\quad(z=x+iy).$$

图　42

直角三角形 OAB 的直角边 OA 可用参数表示为 $z=0+iy(0\leqslant y\leqslant 1)$；由于在这个直角边上的点都满足 $x=0$，所以此时有 $f(z)=y(0\leqslant y\leqslant 1)$．从而

$$\int_{OA}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^1 yi\,\mathrm{d}y=i\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{i}{2}.$$

在直角边 AB 上，$z=x+i(0\leqslant x\leqslant 1)$；所以

$$\int_{AB}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^1(1-x-i3x^2)\cdot 1\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x-3i\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-i.$$

从等式(3)可见

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1-i}{2}. \tag{4}$$

如果用 C_2 表示直线 $y=x$ 上的区间 OB，参数表示为 $z=x+ix(0\leqslant x\leqslant 1)$，

$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 -i3x^2(1+i)\mathrm{d}x = 3(1-i)\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = 1-i. \tag{5}$$

显然 $f(z)$沿 C_1 和 C_2 两条围道的积分值不同，虽然 C_1 和 C_2 有相同的起点和终点.

从上面可见 $f(z)$沿简单闭围道 $OABO$ 或 C_1-C_2 的积分为非零值

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \frac{-1+i}{2}.$$

例 3 在这里我们设 C 表示任意一条从 z_1 到 z_2 的光滑弧(图 43)

$$z = z(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b).$$

125~126

为了计算积分

$$I = \int_C z\mathrm{d}z = \int_a^b z(t)z'(t)\mathrm{d}t,$$

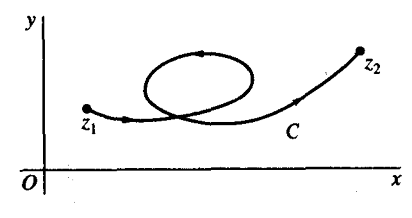


图 43

注意到 37 节练习 1(b)中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{[z(t)]^2}{2} = z(t)z'(t).$$

因此

$$I = \frac{[z(t)]^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{[z(b)]^2-[z(a)]^2}{2}.$$

但是 $z(b)=z_2$，$z(a)=z_1$；且 $I=(z_2^2-z_1^2)/2$. 由于 I 的值只依赖于 C 的端点，与所取的弧无关，我们可以写成

$$\int_{z_1}^{z_2} z\mathrm{d}z = \frac{z_2^2-z_1^2}{2}. \tag{6}$$

(与例 2 比较，那里积分的值依赖于连接给定两点的弧.)

表达式(6)当 C 是围道时也成立，因为围道是由几条光滑弧 $C_k(k=1, 2, \cdots, n)$顺次连接而成的. 更明确地说，设 C_k 连接点 z_k 和 z_{k+1}. 那么

$$\int_C z\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} z\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \frac{z_{k+1}^2-z_k^2}{2} = \frac{z_{n+1}^2-z_1^2}{2}, \tag{7}$$

其中 z_1 是 C 的起点，z_{n+1} 是 C 的终点.

从表达式(7)可以看到 $f(z)=z$ 沿平面上的任意闭围道的积分值都为零(与例 2 比较，那里给定的函数沿一定的闭围道积分值不为零). 一个沿闭围道的积分何时为零将在 42 节、44 节和 46 节中讨论.

例 4　设 C 表示从点 $z=3$ 到 $z=-3$ 的半圆周(图 44)

$$z=3e^{i\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

虽然多值函数 $z^{1/2}$ 的分支(30 节)

$$f(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2}\quad(r>0,0<\theta<2\pi)\tag{8}$$

在围道 C 的起点 $z=3$ 无意义，积分

图 44

$$I=\int_C z^{1/2}\mathrm{d}z$$

是存在的. 因为被积函数在 C 上是分段连续的. 为了看到这一点，我们注意当 $z(\theta)=3e^{i\theta}$ 时函数

$$f[z(\theta)]=\sqrt{3}e^{i\theta/2}=\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}+i\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\quad(0<\theta\leqslant\pi)$$

的实部和虚部在 $\theta=0$ 存在右极限分别为$\sqrt{3}$和 0. 因此将 $f[z(\theta)]$在 $\theta=0$ 的值定义为$\sqrt{3}$，那么它在闭区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上连续. 所以

$$I=\int_0^\pi\sqrt{3}e^{i\theta/2}3ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=3\sqrt{3}i\int_0^\pi e^{i3\theta/2}\mathrm{d}\theta;$$

$$\int_0^\pi e^{i3\theta/2}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3i}e^{i3\theta/2}\Big|_0^\pi=-\frac{2}{3i}(1+i).$$

最后可得

$$I=-2\sqrt{3}(1+i).$$

练习

127～128

对下面练习 1～6，通过对函数 C 或围道 C 的参数表示，计算 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

1. $f(z)=(z+2)/z$，C 为
(a)半圆周 $z=2e^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$；
(b)半圆周 $z=2e^{i\theta}(\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)$；
(c)圆周 $z=2e^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$.
答案：(a)$-4+2\pi i$；　(b)$4+2\pi i$；　(c)$4\pi i$.

2. $f(z)=z-1$，C 为沿
(a)半圆周 $z=1+e^{i\theta}(\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)$；
(b)实轴上的区间 $0\leqslant x\leqslant2$
从 $z=0$ 到 $z=2$ 的弧.

答案：(a)0；(b)0.

3. $f(z)=\pi\exp(\pi\bar{z})$，C 是以 0，1，$1+i$，i 为顶点的正方形的边界沿逆时针方向得到的曲线.

答案：$4(e^{\pi}-1)$.

4. 设函数 $f(z)$ 由方程

$$f(z)=\begin{cases}1, & \text{当 } y<0\\ 4y, & \text{当 } y>0\end{cases}$$

定义且 C 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $z=-1-i$ 到 $z=1+i$ 的弧.

答案：$2+3i$.

5. $f(z)=1$ 且 C 是平面内任意一条连接 z_1 和 z_2 的围道.

答案：z_2-z_1.

6. $f(z)$是如下幂函数的分支

$$z^{-1+i}=\exp[(-1+i)\log z]\quad(|z|>0,0<\arg z<2\pi),$$

C 是圆周 $|z|=1$ 沿正向生成的弧.

答案：$i(1-e^{-2\pi})$.

7. 用 37 节练习 3 得到的结果计算

$$\int_C z^m\bar{z}^n\,dz,$$

其中 m 和 n 都是整数，C 是由圆周 $|z|=1$ 取逆时针方向得到的弧.

8. 计算 40 节中例 1 的积分 I，其中 C 表达式为

$$z=\sqrt{4-y^2}+iy\quad(-2\leqslant y\leqslant 2).$$

（见 38 节练习 2）.

9. 令 C 与 C_0 分别表示圆周

129

$$z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\quad 和\quad z=z_0+Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

用参数表示证明当 f 在 C 上分段连续时，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_0} f(z-z_0)\,dz.$$

10. 令 C 表示圆周 $|z-z_0|=R$ 取逆时针得到的弧. 用 C_0 的参数表示 $z=z_0+Re^{i\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$推出下列积分公式：

(a) $\displaystyle\int_{C_0}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$； (b) $\displaystyle\int_{C_0}(z-z_0)^{n-1}\,dz=0\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots)$.

11. 用练习 10 中的 C_0 及其参数表示来证明

$$\int_{C_0}(z-z_0)^{a-1}\,dz=i\,\frac{2R^a}{a}\sin(a\pi),$$

其中 a 为任意非零实数，被积函数和 R^a 都取主值支.（注意，这里是如何推广了练习 10(b).）

12. (a)设函数 $f(z)$ 在光滑弧 C 上连续，C 有参数表示 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$；也就是

$f[z(t)]$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续．证明如果 $\phi(\tau)(\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta)$如 38 节中所述函数，那么

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f[Z(\tau)]Z'(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $Z(\tau)=z[\phi(\tau)]$．

(b)指出如何推出(a)中的等式在 C 为一般曲线，$f(z)$在其上分段连续时仍成立．从而表明在参数映射时 $f(z)$沿 C 的积分值是不变的．

提示：在(a)中利用 38 节练习 1(b)的结果然后利用那里的(14)．

41　围道积分模的上界

当 C 表示围道 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$时，从 39 节定义(2)及 37 节不等式(5)得

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f[z(t)]||z'(t)|\mathrm{d}t.$$

因此对任意常数 M 如果满足对 C 上的点 z 都有 $|f(z)|\leqslant M$，就有

[130]

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant M\int_a^b |z'(t)|\mathrm{d}t.$$

由于这里右边的积分表示围道的长度 L(见 38 节)，可见 $f(z)$在 C 上的积分值的模不超过 ML：

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant ML \tag{1}$$

这里当 f 在 C 上满足 $|f(z)|<M$ 时上式也取严格不等号．

由于这里考虑的积分路径都是围道，且被积函数在上面分段连续．所以(1)中的 M 总会存在．这是因为当 f 在 C 上连续时，实值函数 $|f[z(t)]|$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续．且这样的函数在区间上可达到最大值 M．于是 $|f(z)|$ 在 C 上连续时就有最大值．从而 f 分段连续时有最大值．

例 1　设 C 是圆周 $|z|=2$ 在第一象限由 $z=2$ 到 $z=2i$ 的圆弧(图 45)．

由不等式(1)可证明

$$\left|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{6\pi}{7}. \tag{2}$$

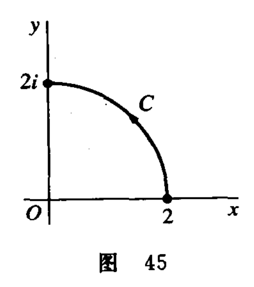


图　45

[131]

这是因为首先如果 z 是 C 上的点，那么 $|z|=2$，从而

$$|z+4|\leqslant|z|+4=6$$
$$|z^3-1|\geqslant||z|^3-1|=7.$$

因此当 z 在 C 上时，

$$\left|\frac{z+4}{z^3-1}\right|=\frac{|z+4|}{|z^3-1|}\leqslant\frac{6}{7}$$

记 $M=\dfrac{6}{7}$且因 C 的长度为 $L=\pi$，我们用不等式(1)就可以得到(2)．

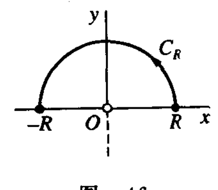


图　46

例 2　C_R 为半圆形路径(图 46)

$$z=Re^{i\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

$z^{1/2}$表示平方根函数的分支

$$z^{1/2}=\sqrt{r}e^{i\theta/2}\quad\left(r>0,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right).$$

不需计算出积分的值就可以看到

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{1/2}}{z^2+1}dz=0. \tag{3}$$

这是因为当 $|z|=R>1$ 时，

$$|z^{1/2}|=|\sqrt{R}e^{i\theta/2}|=\sqrt{R},$$
$$|z^2+1|\geqslant||z^2|-1|=R^2-1.$$

那么在 C_R 上的点处，

[132]

$$\left|\frac{z^{1/2}}{z^2+1}\right|\leqslant M_R \text{ 其中 } \quad M_R=\frac{\sqrt{R}}{R^2-1}.$$

因为 C_R 长度为 $L=\pi R$，由不等式(1)可见

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^{1/2}}{z^2+1}dz\right|\leqslant M_RL.$$

但是

$$M_RL=\frac{\pi R\sqrt{R}}{R^2-1}\cdot\frac{1/R^2}{1/R^2}=\frac{\pi/\sqrt{R}}{1-(1/R^2)},$$

可以看到当 R 趋于无穷时，上式最右边的项趋向于零．于是极限(3)得证．

练习

1．不计算积分证明

$$\left|\int_C\frac{dz}{z^2-1}\right|\leqslant\frac{\pi}{3}$$

其中 C 如 41 节例 1 定义的曲线．

2．C 表示从点 $z=i$ 到点 $z=1$ 的线段．注意在线段上的所有点中，只有中点到原点距离最近，由此不计算积分证明

$$\left|\int_C\frac{dz}{z^4}\right|\leqslant 4\sqrt{2}.$$

3．证明如果 C 是以点 0、$3i$、-4 为端点的三角形的边界其方向沿逆时针方向(图 47)，那么

[133]

$$\left|\int_C(e^z-\bar{z})dz\right|\leqslant 60.$$

图 47

4．设 C_R 表示由圆周 $|z|=R(R>2)$的上半部分沿逆时针方向得到的弧．证明

$$\left|\int_{C_R}\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}dz\right|\leqslant\frac{\pi R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

然后在上式右边分子分母同除以 R^4，证明当 R 趋于无穷时积分值趋于零.

5. 设 C_R 表示圆周 $|z|=R(R>1)$，其方向沿逆时针方向得到的弧. 证明

$$\left|\int_{C_R}\frac{\mathrm{Log}z}{z^2}\mathrm{d}z\right|<2\pi\left(\frac{\pi+\ln R}{R}\right),$$

由此根据洛比塔法则证明当 R 趋于无穷时积分值趋于零.

6. 令 C_ρ 表示由圆周 $|z|=\rho(0<\rho<1)$，其方向沿逆时针方向. 设 $f(z)$在 $|z|\leqslant 1$ 内解析. 证明如果 $z^{-1/2}$表示任一个特定的解析分支，那么存在一个与 ρ 无关的非负常数 M，使得

$$\left|\int_{C_\rho}z^{-1/2}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\pi M\sqrt{\rho}.$$

从而证明当 ρ 趋于零时积分值趋于零.

提示：注意到 $f(z)$在 $|z|\leqslant 1$ 中解析，从而连续，故在 $|z|\leqslant 1$ 中有界(17 节).

7. 设 C_N 表示由曲线

$$x=\pm(N+1/2)\pi \quad 和 \quad y=\pm(N+1/2)\pi$$

围成的正方形的边界，其中 N 为正整数，C 的方向为逆时针.

(a)利用 33 节中练习 10(a)和 11(a)中得到的不等式

$$|\sin z|\geqslant|\sin x| \quad 和 \quad |\sin z|\geqslant|\sinh y|,$$

证明在正方形的竖边上有 $|\sin z|\leqslant 1$，水平边上有 $|\sin z|>\sinh(\pi/2)$. 因此存在与 N 无关的正常数 A，使得对所有 C_N 上的点 z，都有 $|\sin z|\geqslant A$.

(b)利用(a)中得到的结果证明

$$\left|\int_{C_N}\frac{\mathrm{d}z}{z^2\sin z}\right|\leqslant\frac{16}{(2N+1)\pi A},$$

从而得到当 N 趋于无穷时积分值趋于零.

134

42　原函数

虽然一般来说函数 $f(z)$从 z_1 到 z_2 的曲线积分的值依赖于所选择的路径，但确实存在一些函数从 z_1 到 z_2 的曲线积分的值与所选路径无关(比较 40 节中的例 2 和例 3). 所引用的这些例子也能说明沿闭回路的积分值有时可为零. 下面的定理给出了何时积分不依赖于路径，即何时沿闭回路的积分值为零.

在证明这个定理的过程中，我们将得到微积分中的基本定理的推广，由此可以简化许多积分的求值. 这个推广中给出了在区域 D 上的连续函数的*原函数*的概念，即存在 F 使得 $F'(z)=f(z)(z\in D)$. 注意原函数必须是一个解析函数，并且一个给定函数的原函数在相差一个复常数的意义下是唯一的. 这是因为同一函数的任意两个原函数 $F(z)$和 $G(z)$的差 $F(z)-G(z)$的导数为零；由 23 节中的定理知如果解析函数的导数在区域 D 上始终为零，那么这个解析函数在 D 中为常数.

定理　*设函数 $f(z)$在区域 D 上连续. 则下列三个结论是等价的：*

(i) $f(z)$在 D 中存在原函数 $F(z)$；

(ii) $f(z)$ 沿所有连接 z_1 和 z_2 且完全在 D 内的围道的积分值都是一样的；

(iii) $f(z)$ 沿所有完全在 D 内的闭围道的积分值都为零.

要强调的是这个定理并不能说明对任意给定的区域 D 和函数 $f(z)$ 必有上面结论之一成立. 它只说明这三种情形是同时成立或同时不成立的. 为证明此定理，只需证明由(i)可推出(ii)，由(ii)可推出(iii)，最后由(iii)可推出(i).

我们先假设(i)是对的. 如果 D 内连接 z_1 和 z_2 的围道 C 是一条光滑弧，参数表示为 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$，那么从 38 节练习 5 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[z(t)] = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

因为微积分的基本定理对单个实变量的复值函数也成立(37 节)，所以

135

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t = F[z(t)]\Big|_a^b = F[z(b)] - F[z(a)].$$

因为 $z(b)=z_2$ 及 $z(a)=z_1$，那么这个围道积分的值为

$$F(z_2) - F(z_1);$$

并且可见只要 C 是连接 z_1 到 z_2 且在 D 内的曲线，那么这个值就与曲线 C 无关. 也就是 C 光滑时

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}. \tag{1}$$

当 C 是任意位于 D 内的围道时表达式(1)依然成立. 因为如果 C 是由有限条光滑弧 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 组成的，每条 C_k 从 z_k 到 z_{k+1}，那么

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}[F(z_{k+1}) - F(z_k)] = F(z_{n+1}) - F(z_1).$$

(与 40 节例 3 比较.)这就证明了(i)推出(ii).

为了证明(ii)能推出(iii)，我们令 z_1 和 z_2 表示 D 中任意闭曲线上两点，因此可得到两条从 z_1 到 z_2 的路，使得 $C=C_1-C_2$(图 48).

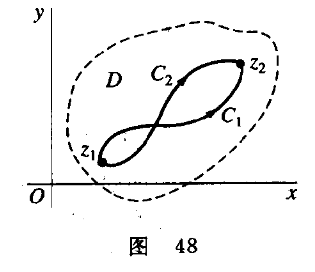


图 48

假设(ii)成立，那么就有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z, \tag{2}$$

或

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

即 $f(z)$ 沿闭围道 $C=C_1-C_2$ 的值均为零.

下面来证明(iii)蕴含(i). 我们假设(iii)正确，由此证明(ii)正确，从而证明(i). 为了证明

136

(ii)是正确的，假设 C_1 和 C_2 表示 D 内从点 z_1 到 z_2 的两条围道，则由(iii)可得等式(3)成立，从而等式(2)成立. 所以积分与 D 内的路径无关. 我们在 D 内定义函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(s)\mathrm{d}s.$$

只要证明在 D 内处处有 $F'(z)=f(z)$ 成立，定理就完全得证. 令 $z+\Delta z$ 表示 z 在 D 内的小邻域中的任意不同于 z 的点，那么

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\mathrm{d}s-\int_{z_0}^{z} f(s)\mathrm{d}s=\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\mathrm{d}s,$$

其中从 z 到 $z+\Delta z$ 的积分路径为一条线段(图 49).

由于

$$\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}s=\Delta z$$

(见 40 节练习 5)，所以

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}s;$$

进而有

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(s)-f(z)]\mathrm{d}s.$$

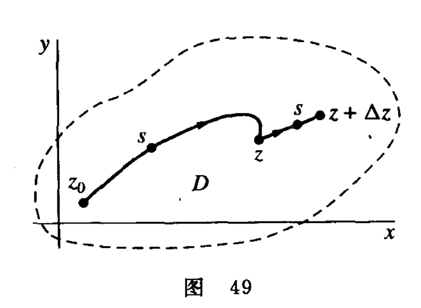


图 49

但 f 在点 z 连续. 于是对任意正数 ε，存在一个正数 δ，使得

$$\text{当 } |s-z|<\delta \quad \text{时,} \quad |f(s)-f(z)|<\varepsilon.$$

于是如果 $z+\Delta z$ 与 z 距离足够小使得 $|\Delta z|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon;$$

即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z),$$

或 $F'(z)=f(z)$.

137

43 举例

下面的例子阐明了 42 节中的定理，特别是那一节中基本定理的扩展形式(1).

例 1 连续函数 $f(z)=z^2$ 在全平面上有原函数 $F(z)=\frac{z^3}{3}$. 于是

$$\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(-1+i)$$

对任何从 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的围道都成立.

例 2 函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}$在平面上除原点外处处连续，在区域 $|z|>0$ 中有原函数 $F(z)=-1/z$. 因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0.$$

其中 C 为以原点为圆心的正向圆周(图 50)

$$z = 2e^{i\theta} \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{1}$$

注意函数 $f(z)=1/z$ 沿这个圆周的积分不能这样计算. 因为虽然 $\log z$ 的任意分支 $F(z)$的导数是 $1/z$(30 节)，但 $F(z)$是不可微的，或说是沿支割线是不可微的. 特别地，如果从原点出发的射线 $\theta=\alpha$ 作为支割线，那么 $F'(z)$在射线与圆周 C 的交点处不存在(图 50). 因此不存在这样的区域使得 C 在其中且处处有 $F'(z)=1/z$，我们不能直接利用原函数. 下面的例 3 表明怎样用两个不同的原函数的组合来计算 $f(z)=1/z$ 沿 C 的值.

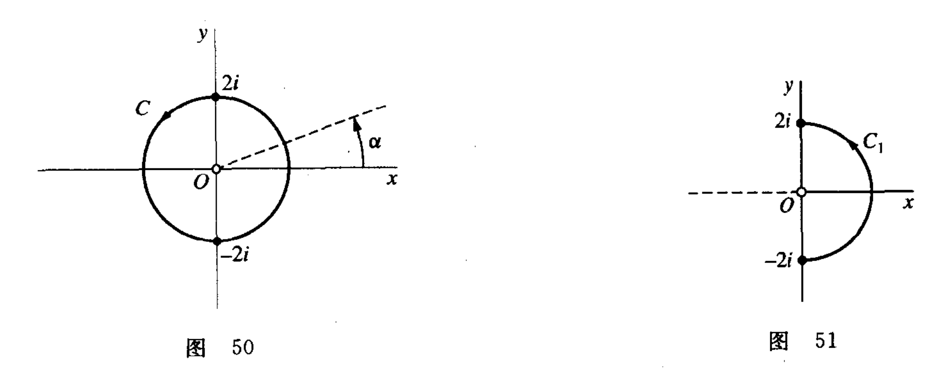


图 50　　图 51

例 3 令 C_1 表示例 2 中的圆周 C 的右半部分

$$z = 2e^{i\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

在计算函数 $1/z$ 沿 C_1(图 51)的积分时，对数函数的主值支

$$\mathrm{Log}z = \ln r + i\Theta \quad (r>0, -\pi<\Theta<\pi)$$

可以作为 $1/z$ 的原函数：

$$\int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{-2i}^{2i} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}z\Big|_{-2i}^{2i} = \mathrm{Log}(2i) - \mathrm{Log}(-2i)$$

$$= \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) - \left(\ln 2 - i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pi i.$$

这个积分在 40 节例 1 中曾用另一种方法计算过，其中曾用到了半圆周的表示式(2).

下面用 C_2 表示同一个圆周 C 的左半部分

$$z = 2e^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right), \tag{3}$$

考虑对数函数的解析分支(图 52)

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi).$$

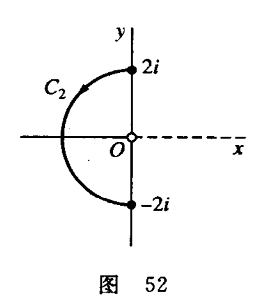


图　52

那么就有

$$\int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{2i}^{-2i} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log z \Big|_{2i}^{-2i} = \log(-2i) - \log(2i)$$

$$= \left(\ln 2 + i\,\frac{3\pi}{2}\right) - \left(\ln 2 + i\,\frac{\pi}{2}\right) = \pi i,$$

所以 $1/z$ 沿整个圆周 $C = C_1 + C_2$ 的积分值可这样得到：

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

例 4　利用原函数来计算

$$\int_{C_1} z^{1/2}\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$

其中被积函数是平方根函数的解析分支

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi), \tag{5}$$

C_1 是任意从 $z=-3$ 到 $z=3$ 的除端点外位于 x 轴上方的围道(图 53).

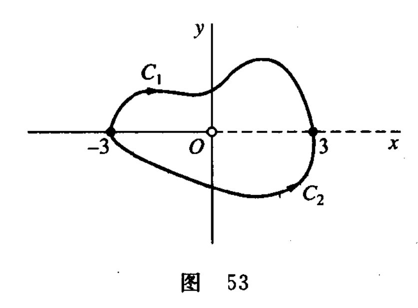


图　53

虽然被积函数在 C_1 上分段连续，从而积分存在，但 $z^{1/2}$ 的分支(5)在 $\theta=0$ 上无意义，特别地，在 $z=3$ 处无意义. 但另一分支

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right),$$

在 C_1 上有定义且处处连续. 在 C_1 上除 $z=3$ 外的点，$f_1(z)$与(5)的值相同，因此可用 $f_1(z)$ 代替(5). 因为 $f_1(z)$的原函数是函数

$$F_1(z) = \frac{2}{3}z^{3/2} = \frac{2}{3}r\sqrt{r}e^{i3\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right),$$

所以

138～139　140

$$\int_{C_1} z^{1/2}\mathrm{d}z = \int_{-3}^{3} f_1(z)\mathrm{d}z = F_1(z)\Big|_{-3}^{3} = 2\sqrt{3}(e^{i0} - e^{i3\pi/2}) = 2\sqrt{3}(1+i).$$

(与 40 节例 4 比较).

函数(5)沿任意连接 $z=-3$ 到 $z=3$ 且位于实轴下方的围道 C_2 的积分

$$\int_{C_2} z^{1/2}\mathrm{d}z \tag{6}$$

可以用类似的方法计算出来．在这种情况下，我们可以用

$$f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad \left(r>0, \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}\right),$$

来代替被积函数，因为 $f_2(z)$的值与被积函数在 $z=-3$ 及 C_2 在实轴下方的点处的值相同．因此我们可以用 f_2 的原函数来计算积分(6)，细节留作练习．

练习

1．利用原函数来证明对任何从点 z_1 到点 z_2 的围道 C，

$$\int_C z^n\mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

2．通过原函数来计算下面积分的值，其中积分路径是任意连接所给积分端点的围道：

(a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z}\mathrm{d}z$； (b) $\int_0^{\pi+2i}\cos\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z$； (c) $\int_1^3 (z-2)^3\mathrm{d}z$.

[141] 答案：(a)$(1+i)/\pi$； (b)$e+(1/e)$； (c)0.

3．用 42 节中的定理来证明

$$\int_{C_0}(z-z_0)^{n-1}\mathrm{d}z = 0 (n=\pm1,\pm2,\cdots)$$

其中 C_0 为任意不过点 z_0 的闭围道．[比较 40 节练习 10(b).]

4．求出 43 节例 4 中 $z^{1/2}$的解析分支 $f_2(z)$的原函数 $F_2(z)$，以此证明积分(6)的值为 $2\sqrt{3}(-1+i)$．于是在那个例子中函数(5)沿闭围道 C_2-C_1 的积分值为 $-4\sqrt{3}$.

5．证明

$$\int_{-1}^{1} z^i\mathrm{d}z = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i),$$

其中 z^i 表示主值支

$$z^i = \exp(i\mathrm{Log}z) \quad (|z|>0, -\pi<\mathrm{Arg}z<\pi),$$

积分路径是任意从 $z=-1$ 到 $z=1$ 且除端点外都位于实轴下方的围道．

提示：利用同一幂级数的解析分支

$$z^i = \exp(i\log z) \quad \left(|z|>0, -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)$$

的原函数．

44　柯西-古萨定理

在 42 节中，我们知道了如果一个连续函数 f 在区域 D 上存在原函数，那么 $f(z)$ 沿任何完全在 D 内的闭围道的积分值都为零. 在本节中，我们给出了一个定理，在对 f 附加别的条件的情况下使得 f 沿简单闭围道(38 节)的值为零. 这个定理在单复变函数论中有着非常重要的地位；它在一些特殊区域上的扩展形式将在 46 节中给出.

我们令 C 表示一条沿正方向(逆时针)的简单闭围道 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$，且假设 f 在 C 上及在被 C 包围的内部处处解析. 根据 39 节，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t; \tag{1}$$

且如果

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \quad 且 \quad z(t)=x(t)+iy(t),$$

142

式(1)中的被积函数 $f[z(t)]z'(t)$ 就是实变量 t 的函数

$$u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)] \quad 和 \quad x'(t)+iy'(t)$$

的乘积. 因此有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b (ux'-vy')\mathrm{d}t+i\int_a^b (vx'+uy')\mathrm{d}t. \tag{2}$$

将上式表示为两个变量的实函数的围道积分的形式，就得到

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y. \tag{3}$$

注意(3)可由左边 $f(z)$ 和 $\mathrm{d}z$ 用 $u+iv$ 和 $\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$ 代替后展开乘积得到. 表达式(3)在 C 是任意曲线时及 $f[z(t)]$ 在其上分段连续时仍成立.

下面我们回忆在微积分中的结果，它能使我们将(3)中的右边的围道积分表达为二重积分. 假定实值函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 连同它们的一阶偏微分在由简单闭围道 C 和它所包围的点组成的闭区域 R 内连续. 根据格林定理，

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_R (Q_x-P_y)\mathrm{d}A.$$

现在 f 在 R 上解析从而连续. 于是函数 u 和 v 也在 R 上连续. 同样若 f 的导数 f' 在 R 上连续，那么 u 和 v 的一阶偏导也在其上连续. 由格林定理我们可将(3)写成

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\iint_R (-v_x-u_y)\mathrm{d}A+i\iint_R (u_x-v_y)\mathrm{d}A. \tag{4}$$

但观察到柯西-黎曼方程

$$u_x=v_y, u_y=-v_x,$$

二重积分的被积函数在 R 上为零. 所以当 f 在 R 上解析及 f' 连续时，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0. \tag{5}$$

143

这个结果是柯西在 19 世纪早期得到的.

注意到证明了这个积分的值是零后，C 的方向就无关紧要了. 所以若 C 的方向取作正方向的话，那么(5)仍是对的，因为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-C} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

例 如果 C 是任意简单闭围道，那么不管方向如何，都有

$$\int_C \exp(z^3)\mathrm{d}z = 0.$$

因为函数 $f(z)=\exp(z^3)$处处解析且它的导数 $f'(z)=3z^2\exp(z^3)$处处连续.

古萨⊖第一个证明了 f'连续这个条件可以省略. 这个条件的省略是非常重要的，例如我们可以在无需假定 f'连续的情况下得到解析函数 f 的导数 f'仍是解析的. 我们现在给出柯西的结果的修正形式即柯西-古萨定理.

定理 *如果函数 f 在简单闭围道 C 的内部和上面的点解析，那么*

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

证明在下节给出，那里特别地将假设 C 是正向生成的. 只希望了解这个定理而不想掌握其证明的读者可直接跳至 46 节.

45 柯西-古萨定理的证明

在证明柯西-古萨定理之前我们先证明一个引理. 设 R 是由正向生成的简单闭围道 C 和它所包围的点组成的闭区域，我们先将 R 分割成一些构成子集. 为做到这一点，我们取平行于实轴和虚轴的直线使得相邻的水平线和相邻的竖直线之间的距离相等. 这样就得到了有限个闭正方形子区域，R 中的点必位于其中至少一个子域中且每个子域都包含 R 中的点. 我们简称这些正方形子区域为*正方形*，它们包含边界及其内点，特别地，如果正方形包含了不属于 R 的点，我们就将这些不属于 R 的点去掉，将剩下的部分叫做*残缺正方形*. 这样我们用有限个正方形和残缺正方形就将 R 覆盖了(图 54). 下面的引理的证明从这种覆盖开始.

144

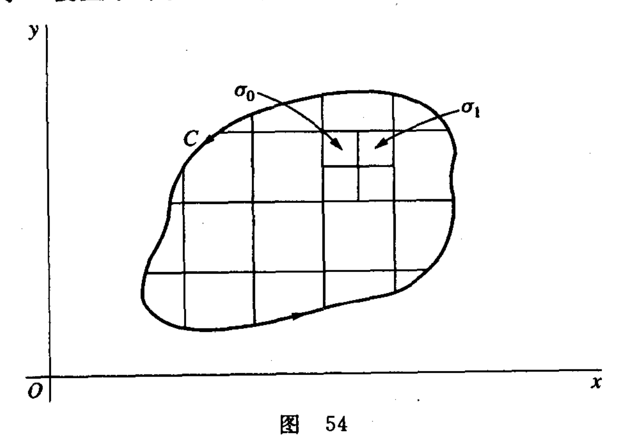


图 54

⊖ E. Goursat(1858—1936)，发音为“古萨”.

引理　设 f 在由正向生成的简单闭围道 C 和它所包围的点组成的闭区域 R 中解析. 对任意正数 ε，域 R 可以被有限多个正方形和残缺正方形覆盖，标记为 $j=1, 2, \cdots, n$，且使得每个正方形或残缺正方形中存在一点 z_j 满足

$$\left|\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}-f'(z_j)\right|<\varepsilon \quad (z \neq z_j) \tag{1}$$

其中 z 与 z_j 在同一正方形或残缺正方形内.

我们假设引理的结论还未满足，那么就存在某一个正方形或残缺正方形，在那里不存在 z_j 使得式(1)对它中的其他 z 点都成立. 如果这个子域是个正方形，那么连接它的对边中点就得到四个小的正方形. 若这个子域是个残缺正方形，那么对它所在的正方形同样可以分割，然后将不属于 R 的点去掉. 若在这小的子域中，不存在 z_j 使得不等式(1)成立，我们用同样的方法得到更小的子域. 当对每个子域按这个过程操作之后，就会发现，经过有限步，R 就可以被有限多个使(1)成立的正方形和残缺正方形覆盖，引理得证. 145

为了验证这一点，假设在对原始的子域进行上面的有限次分割后仍有小子域，其中不存在所需的 z_j，我们来导出矛盾. 如果这个原始的子域是个正方形，用 σ_0 表示；如果它是个残缺正方形，用 σ_0 表示它所在的正方形. 在将 σ_0 分割后，其中必有某个小正方形包含 R 中的点，但不存在合适的点 z_j，记之为 σ_1. 接着我们再分割 σ_1，按同样的方式继续下去. 当 $\sigma_{k-1}(k=1, 2, \cdots)$ 被分割后，可能有多个小正方形可被选来继续构造. 为做一种特殊选择，我们总是选择最下最右的那个.

用这种方法构造下去，我们就得到无穷嵌套序列

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \cdots \tag{2}$$

易见(46 节练习 9)存在 σ_k 的公共点 z_0；而且每个正方形都包含不同于 z_0 的属于 R 的点. 在嵌套序列中正方形的大小是在递减的，且对任意 δ，邻域 $|z-z_0|<\delta$ 包含了那些对角线长度小于 δ 的正方形. 对所有 δ，邻域 $|z-z_0|<\delta$ 中都包含 R 中的点，所以 z_0 是 R 的聚点. 由于 R 是个闭集，所以 z_0 是 R 中的点(见 10 节).

f 在 R 中解析，特别地，f 在 z_0 解析，从而 $f'(z_0)$ 存在. 根据导数的定义(18 节)，对任意 $\varepsilon>0$，存在 δ，使得 $|z-z_0|<\delta$，$z \neq z_0$ 时，

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon.$$

但邻域 $|z-z_0|<\delta$ 包含一个 σ_K，其中 K 足够大使得正方形的对角线长小于 δ(图 55). 那么在 σ_K 包含的子域中，z_0 使得式(1)成立. 这就与序列(2)的构造过程相违背，因此得到一个矛盾，引理得证.

继续假设 f 在由正向生成的简单闭围道 C 和它所包围的点组成的闭区域 R 中解析，我们来证明柯西-古萨定理即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

给定任意正数 ε，我们考虑如引理所述的 R 的覆盖. 我们在第 j 个正方形或残缺正方形上定义下面的函数：

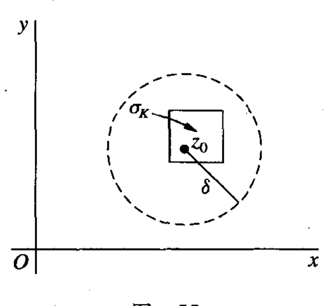


图 55

$$\delta_j(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}-f'(z_j), z\neq z_j\\ 0, z=z_j\end{cases} \tag{4}$$

其中 z_j 是子域中使得式(1)成立的点．由不等式(1)，

$$|\delta_j(z)|<\varepsilon \tag{5}$$

在定义 $\delta_j(z)$ 的子域上成立．且 $\delta_j(z)$ 在相应子域上连续因为 $f(z)$ 在其上连续且

$$\lim_{z\to z_j}\delta_j(z)=f'(z_j)-f'(z_j)=0.$$

接着用 $C_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 表示上面所提到的覆盖 R 的正方形或残缺正方形的正向边界．由定义(4)，f 在某一 C_j 上的点 z 处的值

$$f(z)=f(z_j)-z_jf'(z_j)+f'(z_j)z+(z-z_j)\delta_j(z);$$

这就是说

$$\int_{C_j}f(z)\mathrm{d}z=[f(z_j)-z_jf'(z_j)]\int_{C_j}\mathrm{d}z+f'(z_j)\int_{C_j}z\mathrm{d}z \\ +\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)\mathrm{d}z. \tag{6}$$

但函数 1 和 z 在平面上处处存在原函数，故

$$\int_{C_j}\mathrm{d}z=0 \quad 且 \quad \int_{C_j}z\mathrm{d}z=0$$

146～147

所以由等式(6)可导出

$$\int_{C_j}f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)\mathrm{d}z \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

由于沿任意两个相邻子域的共同边界上，积分的值相互抵消(图 56)，只有沿着 C 的部分积分得以保留，所以式(7)左边的积分之和可以写成

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j}f(z)\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

那么由等式(7)，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)\mathrm{d}z;$$

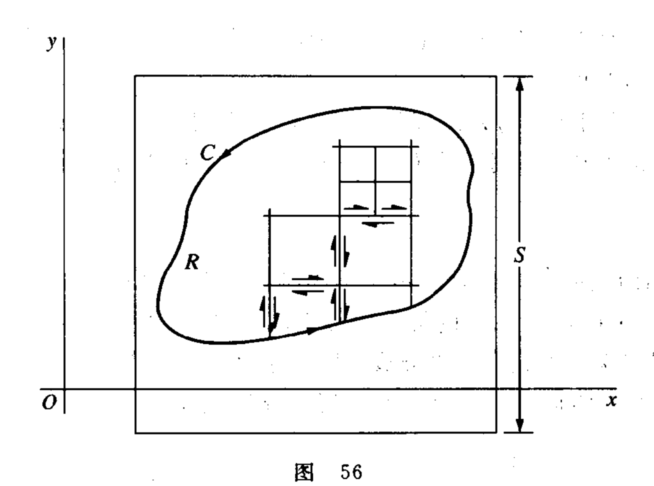


图　56

从而

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)\mathrm{d}z\right|. \tag{8}$$

下面我们应用 41 节性质(1)来找到上面的不等式(8)右边每一个绝对值的上界．为此，首先注意到 C_j 总与一个正方形的边界部分或完全重合．令 s_j 表示方形一边的长．由于在第 j 个积分中变量 z 和点 z_j 都在那个正方形中，故

$$|z-z_j| \leqslant \sqrt{2}s_j.$$

由不等式(5)知，不等式(8)右边的每个被积函数都满足

$$|(z-z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{2}s_j\varepsilon. \tag{9}$$

148

如果 C_j 是正方形的边界，那么它的长度是 $4s_j$，这时用 A_j 表示正方形的面积就得到

$$\left|\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)\mathrm{d}z\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon 4s_j = 4\sqrt{2}A_j\varepsilon. \tag{10}$$

如果 C_j 是残缺正方形的边界，它的长度不超过 $4s_j+L_j$，其中 L_j 是 C 在 C_j 上的那部分的长度．仍令 A_j 表示整个正方形的面积，我们得到

$$\left|\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)\mathrm{d}z\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon(4s_j+L_j) < 4\sqrt{2}A_j\varepsilon + \sqrt{2}SL_j\varepsilon, \tag{11}$$

其中 S 为整个包含了 C 的正方形的一条边的长(图 56)．注意所有 A_j 之和不超过 S^2．

如果用 L 表示 C 长度，用不等式(8)、(10)和(11)得到

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| < (4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL)\varepsilon.$$

由于 ε 为任意正数，上面不等式右边可以任意小，而左边与 ε 无关，所以左边值为零．所以(3)成立．这就完成了柯西-古萨定理的证明．

46　单连通区域和多连通区域

单连通区域是指在其中的任意简单闭围道都只包含该区域的点的那种区域．一条简单闭围

道包含的点组成的集合就是一个单连通区域. 但在两个同心圆周之间的环形区域不是单连通的. 不是单连通的区域叫做多连通区域.

柯西-古萨定理可以用下面的方式从单连通区域推广到多连通区域.

定理 1　*如果函数 f 在单连通区域 D 中解析，那么对 D 中的每条闭围道 C 都有*

149

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

如果 C 是简单闭围道或自相交有限多次的闭围道，那么证明很容易. 因为如果 C 是简单的且在 D 内，那么 f 在 C 内和 C 上的每点都解析；由柯西-古萨定理式(1)成立. 进而如果 C 是闭的但自相交有限多次，那么它可以分成有限多条简单闭围道. 例如图 57 中，$C_k(k=1, 2, 3, 4)$组成了 C. 由柯西-古萨定理沿每个 C_k 积分值都为零，所以就得到

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4}\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

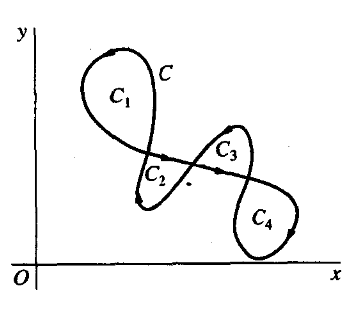


图　57

若闭围道自相交无穷多次时，那么证明就更加精细[⊖]. 有时，在某些特殊情况下，例如在后面的练习 5 中，给出了定理仍然可以应用的一种方法.

推论 1　*在一个单连通区域 D 上解析的函数 f 在 D 中处处都有原函数.*

推论直接可由定理 1 得到. 因为在 42 节中我们知道在给定区域中如果连续函数 f 沿每条区域内的闭围道 C 都有式(1)成立，那么 f 在此区域中存在原函数. 注意由于平面是单连通的，所以整函数总是存在原函数的.

150

柯西-古萨定理可以推广到沿多连通区域积分的情形. 下面的定理就是这种推广.

定理 2　*设*

(i) C 是一条沿逆时针方向的简单闭围道；

(ii) $C_k(k=1, 2, \cdots, n)$是包含在 C 内部沿顺时针方向的简单闭围道，它们互不相交且没有公共内点(图 58).

如果函数 f 在这些围道上并且在那些由位于 C 以内、C_k 以外的点组成的多连通区域上解析，那么

⊖ 对于一般可求长围道定理的证明，例如，可参看 Markushevich 的著作的第一卷的 63～65 页，书名已在附录 A 中列出.

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2}$$

注意到在式(2)中，每条积分路径的方向都是使得多连通区域的点在这条路径的左边.

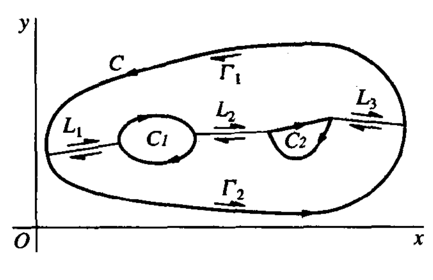


图　58

为证明这个定理，我们引入折线 L_1，它由有限条线段相连而成并连接了 C_1 和 C. 同样我们引入连接 C_1 和 C_2 的折线 L_2；这样继续下去，最后用 L_{n+1} 连接 C_n 和 C. 如图 58 中箭头所示，就得到了两条简单闭围道 Γ_1 和 Γ_2，它们都是由折线 L_k 或 L_{-k} 及 C 和 C_k 的部分组成，方向总是使得它们包含的点在它们的左侧. 对 f 在 Γ_1 和 Γ_2 上，就可以用柯西-古萨定理，从而在这些围道上的积分之和为零. 由于在 L_k 上沿相反方向的积分抵消，所以只有沿 C 和 C_k 的积分保留下来，我们就得到了(2).

下面的结果是定理 2 的一个很重要的结果.

推论 2　令 C_1 和 C_2 是沿逆时针方向的简单闭围道，其中 C_2 在 C_1 内部(图 59). 如果 f 在由这些围道围成的闭区域上解析，那么

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z. \tag{3}$$

151

图　59

为证明这一结论，我们由定理 2 得

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0;$$

我们看到这只不过是式(3)的变形而已.

推论 2 就是著名的道路变形原理，由此可知如果 C_1 在 f 的解析点连续形变得到 C_2，那么

f 在 C_1 上的积分值不会改变.

例 当 C 是任意围绕原点沿逆时针方向的简单闭围道时，由推论 2 可得到

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i.$$

为得到此结果，我们只需构造一个以原点为圆心、沿正方向且半径足够小、整个在 C 内的圆 C_0(图 60). 由 40 节练习 10(a)，

$$\int_{C_0} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i;$$

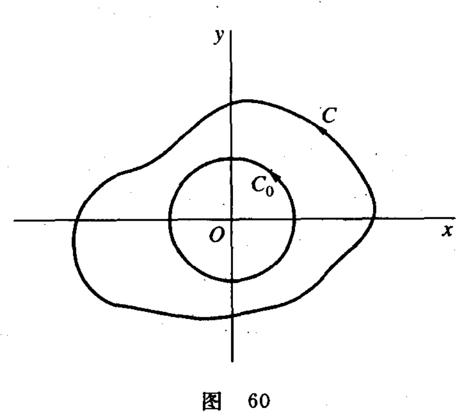


图 60

又因为 $1/z$ 在除 $z=0$ 外处处解析，就得到所需结论.

注意 C_0 也可选择那种半径足够大使得 C 完全在它之内的圆.

练习

1. 应用柯西-古萨定理来说明

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

其中 C 是方向任意的圆周 $|z|=1$ 及

(a) $f(z)=\dfrac{z^2}{z-3}$； (b) $f(z)=ze^{-z}$； (c) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}$；

(d) $f(z)=\operatorname{sech}z$； (e) $f(z)=\tan z$； (f) $f(z)=\operatorname{Log}(z+2)$.

2. 设 C_1 表示正方向的圆周 $|z|=4$，C_2 表示边在 $x=\pm1$，$y=\pm1$(图 61)的正方形的正向边界.

利用 46 节的推论 2 说明为什么

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z,$$

其中

(a) $f(z)=\dfrac{1}{3z^2+1}$； (b) $f(z)=\dfrac{z+2}{\sin(z/2)}$； (c) $f(z)=\dfrac{z}{1-e^z}$.

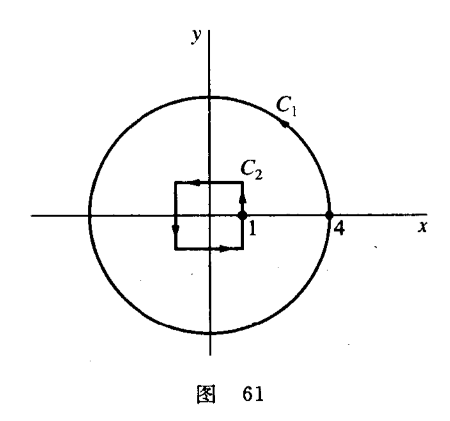


图 61

152～153

3. 令 C_0 表示正向圆周 $|z-z_0|=R$，那么由 40 节练习 10 可知

$$\int_{C_0}(z-z_0)^{n-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}0,\text{当 } n=\pm 1,\pm 2,\cdots \text{ 时}\\ 2\pi i,\text{当 } n=0 \text{ 时}\end{cases}$$

用这个结果和 46 节推论 2 来证明若 C 是矩形 $0\leqslant x\leqslant 3$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 的沿正向的边界，那么

$$\int_{C}(z-2-i)^{n-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}0,n=\pm 1,\pm 2,\cdots\\ 2\pi i,n=0\end{cases}$$

4. 用下面的方法来推导出积分公式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}\quad(b>0).$$

(a)证明 $\exp(-z^2)$ 沿图 62 中矩形道路的上下两条水平边的积分之和可写成

$$2\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x-2e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x$$

而沿左右两条竖边的积分之和可写为

$$ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{-i2ay}\mathrm{d}y-ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{i2ay}\mathrm{d}y.$$

因而由柯西-古萨定理得

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x=e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x+e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\,\mathrm{d}y.$$

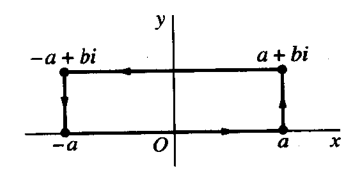


图 62

154

(b)利用[⊖]

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

及注意到

$$\left|\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\mathrm{d}y\right| < \int_0^b e^{y^2}\mathrm{d}y,$$

在(a)中最后得到的等式两边令 a 趋于无穷即可得到所需等式.

5. 据 38 节练习 6 沿函数

$$y(x)=\begin{cases}x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), 当\ 0<x\leqslant 1\ 时,\\ 0, 当\ x=0\ 时\end{cases}$$

的图像从原点到 $z=1$ 的道路 C_1 是一条光滑弧且与实轴相交无限多次. 令 C_2 表示从点 $z=1$ 到原点的道路，令 C_3 表示从原点到 $z=1$ 的不自相交的且与 C_1 和 C_2 只有公共端点的任意光滑弧(图 63).

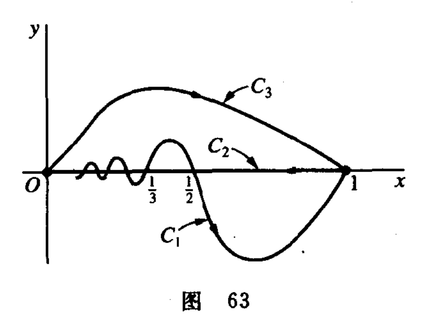


图 63

用柯西-古萨定理证明如果函数 f 是整函数，那么

155

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z \quad 且 \quad \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z.$$

由此知即使闭围道 $C=C_1+C_2$ 自相交无数多次，仍有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

6. 设 C 表示半圆盘 $0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的正向边界，$f(z)$为定义在半圆盘上的连续函数满足 $f(0)=0$ 及

$$f(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2}\quad\left(r>0, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right).$$

⊖ 通常计算这个积分的方法是将其平方写成

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

然后做极坐标映射进行计算. 细节可见 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed., pp. 680-681, 1983.

通过分别计算 $f(z)$ 在组成 C 的半圆周及两条半径上的积分来证明

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

为什么在这里不能用柯西-古萨定理？

7. 证明如果 C 是一条正向的简单闭围道，那么由 C 包围区域的面积可写成

$$\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z.$$

提示：虽然 $f(z)=\bar{z}$ 不解析，44 节中的表达式(4)可在这里使用(见 22 节练习 1(a)).

8. *区间套原理*一个无穷闭区间序列 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$ 按下面的方式来得到：区间 $a_1\leqslant x\leqslant b_1$ 是 $a_0\leqslant x\leqslant b_0$ 的左一半或右一半，区间 $a_2\leqslant x\leqslant b_2$ 是 $a_1\leqslant x\leqslant b_1$ 的其中一半，以此类推. 证明存在点 x_0 属于所有的闭区间 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$.

提示：注意到左端点 a_n 可以表示成一个有界不减数列，因为 $a_0\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}<b_0$；所以当 n 趋于无穷时，它们有极限 A. 右端点 b_n 组成的序列也有极限 B. 证明 $A=B$，从而 $x_0=A=B$.

9. *闭正方形套原理*正方形 σ_0：$a_0\leqslant x\leqslant b_0$，$c_0\leqslant y\leqslant d_0$ 可以被平行于坐标轴的直线分成四个相等的正方形. 按某种原则选择其中的一个小正方形作为 σ_1：$a_1\leqslant x\leqslant b_1$，$c_1\leqslant y\leqslant d_1$. 同样步骤将 σ_1 四等分，取其中之一做为 σ_2，依次进行下去(见 45 节). 证明存在点 (x_0, y_0) 属于所有的闭正方形 σ_0，σ_1，σ_2，….

提示：对闭区间列 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$ 和 $c_n\leqslant y\leqslant d_n$ 应用练习 8 中的结果.　156

47　柯西积分公式

下面给出一个非常基本的结果.

定理　*设 f 在一条沿正向的简单闭围道上及其内部处处解析. 如果 z_0 是 C 内的任意一点，那么*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}. \tag{1}$$

公式(1)叫做*柯西积分公式*. 这个定理说明如果一个函数 f 在一条简单闭围道上及其内部解析，那么 f 在 C 内部的值完全由 f 在 C 上的值决定. 将柯西积分公式写成

$$\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0), \tag{2}$$

就可用它来计算一些沿简单闭围道的积分.

例　设 C 表示正向生成圆周 $|z|=2$. 由于函数 $f(z)=\dfrac{z}{9-z^2}$ 在 C 上及内解析，点 $z=-i$ 在 C 内，由公式(2)知

$$\int_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{(9-z^2)(z+i)} = \int_C \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

开始证明时先设 C_ρ 为正向生成圆周 $|z-z_0|=\rho$，其中 ρ 足够小使得 C_ρ 完全在 C 内部(见图 64).

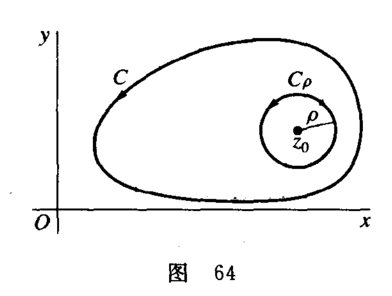


图 64

[157] 由于函数 $f(z)/(z-z_0)$ 在围道 C 和 C_ρ 上及包含在它们之间的区域上解析，根据道路变形原理(46 节推论 2)得

$$\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}.$$

所以

$$\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} - f(z_0)\int_{C_\rho} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \tag{3}$$

但[见 40 节练习 10(a)]

$$\int_{C_\rho} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi i;$$

所以等式(3)变为

$$\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \tag{4}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 解析从而连续，所以对任意正数 ε，存在正数 δ 使得

$$\text{当 } |z-z_0| < \delta \text{ 时，有 } |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon. \tag{5}$$

取圆周 C_ρ 的半径 ρ 小于上述 δ，那么 z 在圆周 C_ρ 上时就使得(5)式成立；再由 41 节不等式(1)知

$$\left|\int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

由式(4)，有

$$\left|\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} - 2\pi i f(z_0)\right| < 2\pi\varepsilon.$$

由于不等式的左边非负且小于任意给定正数，所以值为零. 于是(2)成立，定理得证.

48 解析函数的导数

[158] 由柯西积分公式(47 节)可以推出如果函数 f 在一点解析，那么它在这点的各阶导数都存在且导函数在这点都解析. 为了证明这个结论，我们先来证明一个引理，此引理将柯西积分公式推广到函数的一阶和二阶导数的情形.

引理 设 f 在一条简单闭围道 C 上及其内部处处解析，其中 C 取正定向. 如果 z 是 C 内

的任意一点，那么

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^2}\quad 且\quad f''(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^3}. \tag{1}$$

不严格地说，表达式(1)可以通过在柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z} \tag{2}$$

中形式地在积分号下对 z 求导而得到.

为证(1)式，我们用 d 表示从 z 到 C 上点的最小距离. 利用公式(2)，当 $0<|\Delta z|<d$(见图 65)时，有

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{s-z-\Delta z}-\frac{1}{s-z}\right)\frac{f(s)}{\Delta z}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z-\Delta z)(s-z)},\end{aligned}$$

那么明显地，

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Delta z f(s)\mathrm{d}s}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}. \tag{3}$$

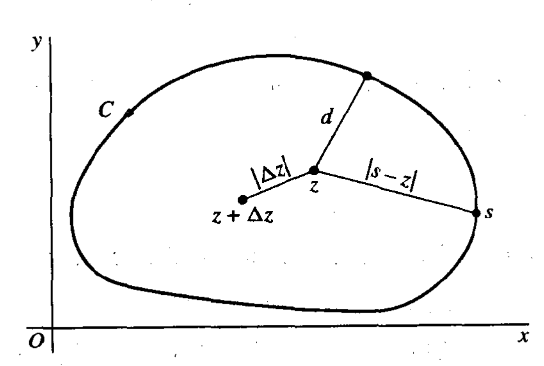


图　65

159

接着，设 M 为 $|f(s)|$ 在 C 上的最大值，由于 $|s-z|\geqslant d$ 及 $|\Delta z|<d$，

$$|s-z-\Delta z|=|(s-z)-\Delta z|\geqslant\big||s-z|-|\Delta z|\big|\geqslant d-|\Delta z|>0.$$

因此

$$\left|\int_C\frac{\Delta z f(s)\mathrm{d}s}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}\right|\leqslant\frac{|\Delta z|M}{(d-|\Delta z|)d^2}L,$$

其中 L 为 C 的长度. 令 $|\Delta z|$ 趋于零，我们从这个不等式得(3)的右边也趋于零. 结果

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^2}=0;$$

那么所希望的 $f'(z)$的表达式得证.

用同样的方法可证得引理中 $f''(z)$的表达式. 在练习 9 中列出了纲要，细节留给读者.

定理 1 如果函数在一点解析，那么它在这点的所有阶导数都存在，并且这些导函数也在这点解析.

为了证明这个重要的定理，我们假设 f 在一点 z_0 解析. 那么存在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 使得 f 在其中解析(见 23 节). 所以存在圆心在 z_0、半径为 $\varepsilon/2$ 的正向圆周 C_0，f 在 C_0 上及其内部解析(图 66).

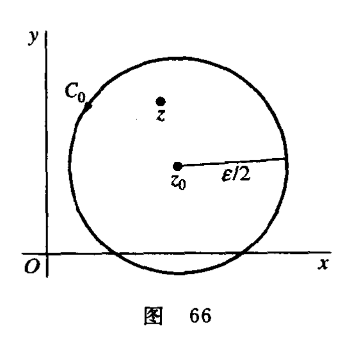


图 66

根据上面引理

$$f''(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^3}$$

160 在 C_0 内任意点 z_0 都成立，这就意味着 f' 在点 z_0 解析. 对解析函数 f' 用同样的过程可知 f'' 也解析，如此进行下去. 定理 1 得证.

由此定理可以得到当函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

在一点 $z=(x, y)$ 解析时，f' 的可微性保证了 f' 的连续性. 那么由于

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y,$$

我们得 u 和 v 的一阶偏导在那点连续. 进而对二阶导数，可根据 f'' 在 z 解析连续且

$$f''(z)=u_{xx}+iv_{xx}=v_{yx}-iu_{yx}.$$

如此下去我们就得到如 25 节所期望的一条推论.

推论 如果函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在一点 $z=(x, y)$ 有定义且解析，那么 u 和 v 在这点就存在各阶连续偏导数.

利用数学归纳法可将公式(1)推广为

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^{n+1}}\quad (n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

验证的过程比 $n=1$ 和 $n=2$ 稍微麻烦些，有兴趣的读者可查阅其他材料⊖.

注意我们假定

$$f^{(0)}(z)=f(z)\quad 且\ 0!=1,$$

⊖ 例如，可参看 Markushevich 的著作的第一卷，书名已在附录 A 中列出.

这时表达式(4)当 $n=0$ 时仍成立，即柯西积分公式(2).

将(4)写成

$$\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{5}$$

那么在计算一些积分时非常有用. 当 $n=0$ 时在 47 节中已经说明过了. [161]

例 1 如果 C 是正向单位圆周 $|z|=1$ 及

$$f(z) = \exp(2z),$$

那么

$$\int_C \frac{\exp(2z)\mathrm{d}z}{z^4} = \int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-0)^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{8\pi i}{3}.$$

例 2 设 z_0 是正向简单闭围道 C 内任意一点. 当 $f(z)=1$ 时，表达式(5)表明

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi i$$

及

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = 0 \quad (n=1,2,\cdots).$$

(比较 40 节练习 10).

我们用莫勒拉的一个定理结束这节. 这儿的证明依赖于定理 1 所述的事实即解析函数的导函数仍解析.

定理 2 *设 f 在区域 D 上连续. 如果对 D 内的每条闭围道 C 都有*

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

那么 f 在 D 内解析.

特别地，当 D 为单连通时，我们就得到 46 节定理 1 的逆.

为证明此定理，我们注意到前提成立时，42 节的定理保证了 f 在 D 存在原函数；即存在解析函数 F 使得 $F'(z)=f(z)$ 在 D 内的任意点都成立. 由于 f 是 F 的导函数，那么从定理 1 即可得 f 在 D 内解析.

练习

1. 设 C 表示边在 $x=\pm 2$ 及 $y=\pm 2$ 上的正方形的正向边界. 计算下列积分：

(a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}\mathrm{d}z}{z-(\pi i/2)}$；　(b) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\mathrm{d}z$；　(c) $\displaystyle\int_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{2z+1}$；　(d) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\mathrm{d}z$； [162]

(e) $\displaystyle\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\mathrm{d}z \; (-2 < x_0 < 2)$.

答案：(a)2π；　(b)$\pi i/4$；　(c)$-\pi i/2$；　(d)0；(e)$i\pi\sec^2(x_0/2)$.

2. 求下面 $g(z)$ 沿正向圆周 $|z-i|=2$ 的积分的值

(a) $g(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$；　(b) $g(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

答案：(a) $\pi/2$；(b) $\pi/16$.

3. 令 C 是正向圆周 $|z|=3$. 证明如果

$$g(w)=\int_C \frac{2z^2-z-2}{z-w}dz \quad (|w|\neq 3),$$

那么 $g(2)=8\pi i$. 当 $|w|>3$ 时，$g(w)$ 值为多少？

4. 设 C 为 z 平面上的任意正向简单闭围道. 记

$$g(w)=\int_C \frac{z^3+2z}{(z-w)^3}dz.$$

证明当 w 在 C 内时，$g(w)=6\pi iw$；而 w 在 C 外时，$g(w)=0$.

5. 证明如果 f 在简单闭围道 C 内及其上解析，z_0 不在 C 上，那么

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z-z_0}=\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}.$$

6. 设 f 表示一个在简单闭围道 C 上连续的函数. 仿照 48 节的过程证明

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{s-z}$$

在 C 内每点都解析且有

$$g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}.$$

7. 设 C 表示单位圆周 $z=e^{i\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$. 首先证明对任意实数 a，

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}dz=2\pi i.$$

在将这个积分用 θ 表示出来得到积分公式

163

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta=\pi.$$

8. (a) 利用第 3 节中的二项式公式证明对任何 n，函数

$$P_n(z)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

是 n 阶多项式[⊖].

(b) 设 C 表示围绕给定点 z 的任意正向简单闭围道. 利用 48 节关于解析函数第 n 阶导数的积分表达式(4)证明(a)中的多项式可表示成

$$P_n(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(s^2-1)^n}{(s-z)^{n+1}}ds \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(c) 指出当 $z=1$ 时，(b) 中 $P_n(z)$ 的表示式中的被积函数怎样写成 $(s+1)^n/(s-1)$. 利用柯

⊖ 当 $z=x$ 时，这些就是 37 节练习 7 出现的勒让德多项式.

西积分公式证明

$$P_n(1)=1 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

同理证明

$$P_n(-1)=(-1)^n \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

9. 按下列步骤证明 48 节中引理的表达式

$$f''(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^3}.$$

(a)利用引理中 $f'(z)$的表达式来证明

$$\frac{f'(z+\Delta z)-f'(z)}{\Delta z}-\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)^3}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{3(s-z)\Delta z-2(\Delta z)^2}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^3}f(s)\mathrm{d}s.$$

(b)令 D 和 d 分别表示从 z 点到 C 的最大和最小距离. 令 M 表示 $|f(s)|$ 在 C 上的最大值，L 表示 C 的长度. 用三角不等式及引理中 $f'(z)$的导数表达式，证明 $0<|\Delta z|<d$ 时，(a)中右边积分值有上界为

$$\frac{(3D|\Delta z|+2|\Delta z|^2)M}{(d-|\Delta z|)^2d^3}L.$$

(c)利用(a)和(b)中的结果来得到 $f''(z)$的表达式. [164]

49　刘维尔定理与代数基本定理

这节主要的目的是给出由 48 节的柯西积分公式推导出的两个很重要的定理.

引理　设函数 f 在一以 z_0 为圆心，半径为 R 的正向圆周 C_R(图 67)上及其内解析. 如果 M_R 表示 $|f(z)|$ 在 C_R 上的最大值，那么

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!M_R}{R^n} \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

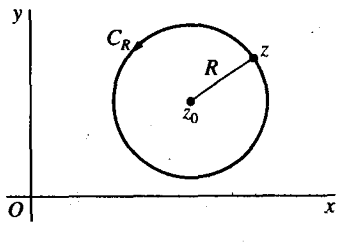


图　67

不等式(1)叫做柯西不等式，这可直接由下式推得：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=1,2,\cdots),$$

我们只要利用 41 节关于围道积分值的模的上界估计的不等式(1)就可见

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M_R}{R^{n+1}}2\pi R \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 M_R 如引理中所设. 这显然就是引理的结论.

这个引理可用来证明在复平面上不存在非常数值的有界整函数，这也就是我们的第一个定理即刘维尔定理：

165 **定理 1**　*如果函数 f 是整函数且在复平面上有界，那么 f 是常值函数.*

我们设 f 满足定理的条件，那么由于 f 是整函数，所以对 $n=1$，柯西不等式(1)对任意的 z_0 及 R 都成立

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M_R}{R}. \tag{2}$$

进而，定理中函数的有界性条件说明存在非负常数 M 使得对所有的 z 都有 $|f(z)|<M$；因为不等式(2)中的常数 M_R 总是不大于 M，所以

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}, \tag{3}$$

其中 z_0 是复平面上的任意给定的点，R 可任意大. (3)中的数 M 与 R 的取值无关，故由此得 $f'(z_0)=0$. 由于 z_0 是复平面上的任意一点，所以 $f'(z_0)$ 在平面上处处成立. 那么由 23 节的定理得 f 是常值函数.

下面的定理即著名的代数基本定理，可由刘维尔定理直接得到.

定理 2　*任意 $n(n\geqslant 1)$ 阶多项式*

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n \quad (a_n\neq 0)$$

至少有一个零点，即至少存在一点 z_0 使得 $P(z_0)=0$.

这里用反证法. 假设 $P(z)$ 对任何 z 都不为零. 那么

$$f(z)=\frac{1}{P(z)}$$

很明显是整函数，并且在复平面有界.

为证明其有界，我们先记

$$w=\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_2}{z^{n-2}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{z}, \tag{4}$$

那么 $P(z)=(a_n+w)z^n$. 接着观察到可以找到充分大的数 R 使得(4)中的每一项当 $|z|\geqslant R$ 时都小于 $|a_n|/(2n)$. 由 n 项的广义三角多项式得当 $|z|\geqslant R$ 时，$|w|<|a_n|/2$. 所以当 $|z|\geqslant R$ 时，

166
$$|a_n+w| \geqslant \|a_n|-|w\| > \frac{|a_n|}{2};$$

这就让我们得到

$$\text{当 } |z|\geqslant R \text{ 时，有 } |P(z)|=|a_n+w\|z^n|>\frac{|a_n|}{2}|z|^n \geqslant \frac{|a_n|}{2}R^n. \tag{5}$$

那么

当 $|z|>R$ 时，　　$|f(z)|=\frac{1}{|P(z)|}<\frac{2}{|a_n|R^n}$

因此 f 在圆盘 $|z|\leqslant R$ 外有界. f 在闭圆盘上连续，所以 f 在其上有界. 因此 f 在整个平面上有界.

现在根据刘维尔定理 $f(z)$ 是常数，所以 $P(z)$ 为常数. 这就得到了矛盾[⊖].

根据基本定理可知 $n(n\geqslant 1)$ 阶多项式 $P(z)$ 可以表示为

$$P(z)=c(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n), \tag{6}$$

其中 c 与 $z_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 都是复常数. 详细地说，定理保证了 $P(z)$ 有零点 z_1. 那么由 50 节练习 10 得，

$$P(z)=(z-z_1)Q_1(z),$$

其中 $Q_1(z)$ 是 $n-1$ 阶多项式. 对 $Q_1(z)$ 做同样的讨论知存在数 z_2，使得

$$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)Q_2(z),$$

其中 $Q_2(z)$ 是 $n-2$ 阶多项式. 如此进行下去就可得到表达式(6). (6)中的零点 z_k 当然有可能重复出现. 但很显然 $P(z)$ 至多有 n 个不同零点.

50 最大模原理

在这节中，我们来推导一个关于解析函数模的最大值的重要结果. 先给出一个引理.

引理 *设 f 在 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内解析且满足 $|f(z)|\leqslant|f(z_0)|$，那么 $f(z)$ 在这个邻域中为常数 $f(z_0)$.*

167

为证明之，我们假设 f 满足已知条件，令 z_1 为所给定邻域中任意异于 z_0 的点. 设 ρ 表示点 z_0 与 z_1 间的距离. 若用 C_ρ 记以 z_0 为圆心且经过点 z_1 的正向圆周 $|z-z_0|=\rho$(图 68)，

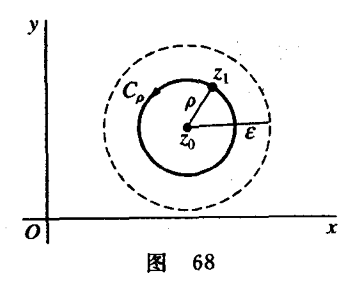


图 68

由柯西积分公式可得

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}; \tag{1}$$

又因 C_ρ 的参数表示为

$$z=z_0+\rho e^{i\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

⊖ 关于基本定理的一个用到柯西—古萨定理的有趣的证明可查阅 R. P. Boas, Jr., *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 2, p. 180, 1964.

故(1)可以写成

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

从(2)式可见当函数在一个给定圆周上及其内解析时，它在圆心的值是它在圆周上的值的算术平均值. 这叫做高斯均值定理.

从(2)式可得

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta. \tag{3}$$

另一方面，由于

$$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\leqslant|f(z_0)|\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi), \tag{4}$$

我们得到

$$\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{2\pi}|f(z_0)|\mathrm{d}\theta=2\pi|f(z_0)|.$$

因此

168

$$|f(z_0)|\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

明显由不等式(3)和(5)可知

$$|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta,$$

或

$$\int_0^{2\pi}[|f(z_0)|-|f(z_0+\rho e^{i\theta})|]\mathrm{d}\theta=0.$$

最后一个积分中的被积函数是 θ 的连续函数；且由条件(4)在整个区间 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上都非负. 由于积分值为零，故被积函数恒为零. 就是

$$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|=|f(z_0)|\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{6}$$

这表明 $|f(z)|=|f(z_0)|$ 对圆周 $|z-z_0|=\rho$ 上的所有 z 都成立.

最后由于 z_1 是空心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内任意一点，可见对任意 $0<\rho<\varepsilon$，圆周 $|z-z_0|=\rho$ 上的点 z 都满足 $|f(z)|=|f(z_0)|$. 所以 $|f(z)|=|f(z_0)|$ 在 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内处处成立. 根据24节练习7(b)知当解析函数在区域中模为常数时，函数也为常数. 因此 $f(z)=f(z_0)$ 在这个邻域中都成立，引理得证.

利用这个引理就可以证明下面的最大模原理.

定理 *如果函数 f 在给定区域上解析且不为常数，那么 $|f(z)|$ 在 D 内取不到最大值，即不存在 D 内的点 z_0 使得 $|f(z)|\leqslant|f(z_0)|$ 对 D 内所有点 z 都成立.*

给定 f 在 D 内解析，我们假设 $|f(z)|$ 在 D 内一点 z_0 处取得最大值然后证明 $f(z)$ 在 D 内为常数.

这里所用的方式与26节中证明引理时是类似的. 我们取 D 内的折线 L 来连接 z 与 D 内任

意点 P. 用 d 表示 L 到 D 的边界的最小距离. 当 D 是整个平面时，d 可取任意正数. 接着我们在 L 上取有限个点

$$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$$

使得 z_n 与点 P 重合且

$$|z_k - z_{k-1}| < d \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

169

设 N_k 为以 z_k 为中心，半径为 d 的圆邻域，那么就得到一些圆域(图 69)

$$N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}, N_n,$$

这些圆域都包含在 D 内且 $N_k(k=1, 2, \cdots, n)$的圆心在 N_{k-1}.

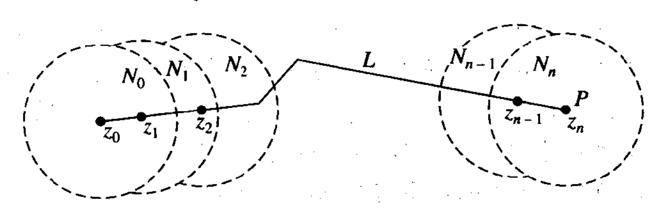


图 69

由于假设 $f(z)$在 D 的 z_0 达到最大值，所以那也是在 N_0 的最大值点. 那么 $f(z)$在 N_0 上为常数 $f(z_0)$. 特别地，$f(z_1)=f(z_0)$. 这意味着在 N_1 内处处有 $|f(z)| \leqslant |f(z_1)|$；再次应用引理可得当 z 为 N_1 内点时

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0).$$

因为 z_2 在 N_1 内，那么 $f(z_2)=f(z_0)$. 于是当 z 在 N_2 时就有 $|f(z)| \leqslant |f(z_2)|$；再次应用引理得当 z 属于 N_2 时，

$$f(z) = f(z_2) = f(z_0).$$

如此继续下去我们就得到在 N_n 内有 $f(z_n)=f(z_0)$.

注意到我们假设 $z_n=P$ 为 D 内任意不为 z_0 的点，所以我们得到在 D 内处处有 $f(z)=f(z_0)$. 定理得证.

如果函数 f 在一个有界闭区域 R 内解析且在 R 上连续，那么 $|f(z)|$ 在 R 上可取到最大值(17 节). 即存在一个非负常数 M，使得对 R 中所有点 z 都有 $|f(z)| \leqslant M$，且等号能在 R 上至少一点处成立. 如果 f 是常值函数，那么在 R 内所有点都有 $|f(z)|=M$. 如果 $f(z)$不是常数，那么根据最大模原理，在 R 的内点 z 处有 $|f(z)| \neq M$. 我们就得到了最大模原理的一个重要推论.

170

推论 设 f 在一个有界闭区域 R 上连续且在 R 内部解析不为常数，那么 $|f(z)|$ 总会在 R 的边界某点处达到最大值.

例 令 R 表示矩形区域 $0 \leqslant x \leqslant \pi$，$0 \leqslant y \leqslant 1$. 由上面推论整函数 $f(z)=\sin z$ 的模在 R 的最大值在边界某处可达到. 这可以直接通过计算来验证(见 33 节)

$$|f(z)| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

注意 $\sin^2 x$ 当 $x=\pi/2$ 时最大而 $\sinh^2 y$ 当 $y=1$ 时最大. 所以 $|f(z)|$ 在 R 的最大值在边界点 $z=(\pi/2, 1)$ 处取得，在 R 中无其他点取此值(图 70).

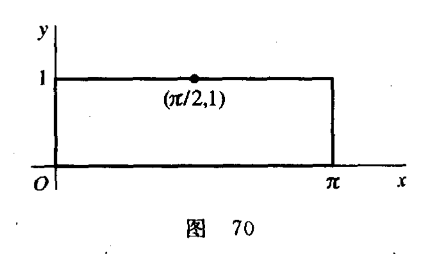


图　70

当推论中的函数 f 写成 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，函数 $u(x, y)$ 在 R 上调和(见 25 节)有最大值并且最大值点只可能在 R 的边界上. 这是由于复合函数 $g(z)=\exp[f(z)]$ 在 R 上连续且在其内部不为常数. 所以 $|g(z)|=\exp[u(x, y)]$ 在 R 上连续且在边界上取得最大值. 根据指数函数的单调性就可得 $u(x, y)$ 在边界上取得最大值.

$|f(z)|$ 和 $u(x, y)$ 的最小值的性质将在练习中给出.

练习

1. 设 f 是整函数且对所有的 z 满足 $|f(z)|\leqslant A|z|$，其中 A 是个给定的正常数. 证明 $f(z)=a_1 z$，其中 a_1 为复常数.

提示：利用柯西不等式(49 节)可证 $f''(z)$ 在平面上处处为零. 注意柯西不等式中的常数 M_R 不大于 $A(|z_0|+R)$.

171

2. 设 $f(z)$ 是整函数且调和函数 $u(x, y)=\mathrm{Re}[f(z)]$ 有上界 u_0，即在 xy 平面的所有点 (x, y) 处都满足 $u(x, y)\leqslant u_0$. 证明 $u(x, y)$ 在平面上为常数.

提示：对函数 $g(z)=\exp[f(z)]$ 应用刘维尔定理(49 节).

3. 证明当 R 充分大时，49 节定理 2 中的多项式 $P(z)$ 满足不等式

$$|P(z)|<2|a_n||z|^n, \quad |z|\geqslant R.$$

[与 49 节不等式(5)的第一个比较.]

提示：注意到存在正数 R 使得当 $|z|\geqslant R$ 时，49 节的(4)式的每个商都小于 $|a_n|/n$.

4. 设函数 f 在有界闭区域 R 上连续，且设它在 R 内解析不为常数. 若 f 在 R 处处不为零，证明 f 在 R 内存在最小值并且最小值点必在 R 的边界取得. 对函数 $g=1/f$ 应用最大模原理(50 节)就可得到这一结论.

5. 用函数 $f(z)=z$ 来说明练习 4 中 $f(z)$ 在 R 中处处不为零这个条件是必要的. 也就是说，证明函数 $|f|$ 能在内点处达到最小值 0.

6. 考虑函数 $f(z)=(z+1)^2$ 及顶点在 $z=0$，$z=2$，$z=i$ 的三角形闭区域 R. 找到 $|f(z)|$ 在 R 内的最大值点和最小值点，这表明了 50 节和练习 4 的结果.

提示：将 $|f(z)|$ 看作是点 z 和 -1 之间距离的平方.

7. 设 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在有界闭区域 R 上连续且在其内解析不为常数. 证明 $u(x, y)$ 在且只在 R 的边界处取得最小值(见练习 4).

8. 设 f 为函数 $f(z)=e^z$，R 为矩形区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant \pi$. 找出 $u(x, y)=\mathrm{Re}[f(z)]$在 R 内的最大值点和最小值点来说明 50 节及练习 7 的结果.

9. 设 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在有界闭区域 R 上连续且在其内解析不为常数.

证明 $v(x, y)$在且只在 R 的边界处取得最大值及最小值.

提示：对函数 $g(z)=-if(z)$应用 50 节和练习 7 中的结果.

10. 设 z_0 是 $n(n\geqslant 1)$阶多项式 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n(a_n\neq 0)$的零点. 按下面的 [172] 方法证明

$$P(z)=(z-z_0)Q(z),$$

其中 $Q(z)$是 $n-1$ 阶多项式.

(a)验证

$$z^k-z_0{}^k=(z-z_0)(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\cdots+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1})\quad (k=2,3,\cdots).$$

(b)利用(a)中的分解来证明

$$P(z)-P(z_0)=(z-z_0)Q(z),$$

其中 $Q(z)$是 $n-1$ 阶多项式，由此可证得所需结果. [173]

第5章 级　　数

本章主要介绍解析函数的级数表示．我们给出一些定理保证级数表示的存在，然后介绍展开级数的技巧．

51　收敛序列

称一列无穷复数序列

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots \tag{1}$$

有极限 z，如果对任意正数 ε，存在正整数 n_0，满足

$$|z_n - z| < \varepsilon, \text{其中 } n > n_0. \tag{2}$$

其几何意义是，对充分大的 n，点 z_n 存在于 z 的任意 ε 邻域(图71)．由于我们可以选择任意小的 ε，则可以说随 n 的增长 z_n 无限接近于 z，通常要求的 n_0 依赖于 ε 的值．

序列(1)至多可能有一个极限．也就是说，如果极限存在，则它就是唯一的(第52节练习5)．当该极限存在时，则称序列收敛于 z；我们记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z. \tag{3}$$

175

如果没有极限，则称它发散．

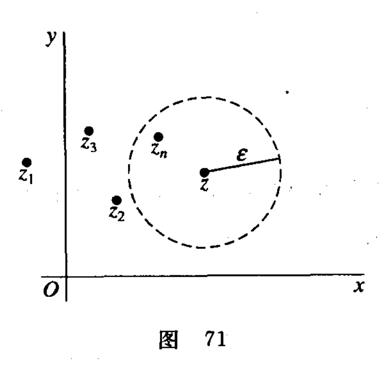


图　71

定理　设 $z_n = x_n + iy_n (n=1, 2, \cdots)$ 和 $z = x + iy$，则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \tag{4}$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{和} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{5}$$

为证明该定理，我们首先假定条件(5)成立，然后由它得到条件(4)．根据条件(5)，对于任意正数 ε，存在正整数 n_1 和 n_2，满足

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{其中 } n > n_1$$

和

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, 其中 n > n_2.$$

因而，如果 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$，则

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 和 \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, 其中 n > n_0.$$

既然

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|,$$

那么

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, 其中 n > n_0.$$

176 故条件(4)成立.

相反地，如果从条件(4)开始，我们知道对于任意正数 ε，存在一个正整数 n_0，满足

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \varepsilon, 其中 n > n_0.$$

但

$$|x_n - x| \leqslant |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

和

$$|y_n - y| \leqslant |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|;$$

这意味着：

$$|x_n - x| < \varepsilon 和 |y_n - y| < \varepsilon, 其中 n > n_0.$$

即满足条件(5).

根据定理，下面无论右边两个极限存在还是左边极限存在，我们可以记

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

例 序列

$$z_n = \frac{1}{n^3} + i \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

收敛于 i. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3} + i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} + i \lim_{n\to\infty} 1 = 0 + i \cdot 1 = i.$$

若记

$$|z_n - i| = \frac{1}{n^3},$$

我们也可以应用(2)得到该结论. 更精确地说，对于任意正数 ε

$$|z_n - i| < \varepsilon, 其中 n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}.$$

177

52　收敛级数

一列无穷复数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1}$$

收敛于和 S，如果序列部分和

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N \quad (N = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

收敛于 S；那么我们记

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

既然序列至多有一个极限，则级数也至多有一个和，当级数不收敛时，我们称它为发散的.

定理　设 $z_n = x_n + iy_n (n=1, 2, \cdots)$ 和 $S = X + iY$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \tag{3}$$

当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y. \tag{4}$$

当然定理告诉我们

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

成立，只要左边的级数收敛或右边的两个级数收敛.

为了证明该定理，我们记部分和(2)如下

$$S_N = X_N + iY_N, \tag{5}$$

此时

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad 和 \quad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n.$$

178

结论(3)为正确的当且仅当

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S; \tag{6}$$

又根据条件(5)和第 51 节中的数列定理知，极限(6)存在当且仅当

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X \quad 和 \quad \lim_{N\to\infty} Y_N = Y. \tag{7}$$

因而根据(7)可推出结论(3)，反过来同样也成立. 由于 X_N 和 Y_N 为级数(4)的部分和，则定理得到证明.

通过计算知道实收敛级数的第 n 项在 n 趋于∞时趋于 0. 我们从本章和前一章的定理立刻可以得出，对于复收敛级数该结论也是成立的. 即级数(1)收敛的必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0. \tag{8}$$

因而，复收敛级数的各项是有界的．特别地，存在一个正数 M，对于任意正整数 n，满足 $|z_n| \leqslant M$(参考练习 9)．

下面为复级数的另一个重要性质，我们设级数(1)为绝对收敛的，即当 $z_n = x_n + iy_n$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

收敛．由于

$$|x_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad 和 \quad |y_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

从计算对比可以知道，两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

一定收敛．从而，由于实级数绝对收敛，可以推出级数本身的收敛，得出级数(4)收敛于实数 X 和 Y．那么根据本章定理级数(1)收敛．因此，复级数的绝对收敛可以推出该级数收敛．

在确立级数和为一给定数 S 的事实时，经常定义第 N 项后的余项 ρ_N 为

179

$$\rho_N = S - S_N. \tag{9}$$

则 $S = S_N + \rho_N$；又由于 $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$，我们知道级数收敛于数 S，当且仅当余项序列趋于零．我们将在处理幂级数时考虑使用这个结论，幂级数为如下形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots,$$

此处 z_0 和系数 a_n 为复数，z 为包含 z_0 的给定区域中任意点．在该级数中，变量为 z，我们将分别以 $S(z)$、$S_N(z)$ 和 $\rho_N(z)$ 表示级数和、级数部分和及级数的余部．

例 应用余项容易证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, 其中 |z| < 1. \tag{10}$$

根据恒等式(练习 10，第 7 节)

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

部分和为

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} \quad (z \neq 1)$$

现改写为

$$S_N(z) = \frac{1-z^N}{1-z}.$$

如果

$$S(z)=\frac{1}{1-z},$$

那么

$$\rho_N(z)=S(z)-S_N(z)=\frac{z^N}{1-z}\quad(z\neq 1).$$

则

$$|\rho_N(z)|=\frac{|z|^N}{|1-z|},$$

显然，由该式知余项 $\rho_N(z)$ 在 $|z|<1$ 时趋于零，但在 $|z|\geqslant 1$ 时不成立．因而求和公式(10)得证．

180

练习

1．用两种方法证明序列

$$z_n=-2+i\frac{(-1)^n}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

收敛于－2．

2．设 r_n 表示练习 1 中复数 z_n 的模，Θ_n 为复数 z_n 的幅角的主值，证明：序列 $r_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，但序列 $\Theta_n(n=1,2,\cdots)$ 不收敛．

3．证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|z|$．

4．在第 52 节练习推导的求和公式中记 $z=re^{i\theta}$，其中 $0<r<1$．则应用第 52 节的定理证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

此处 $0<r<1$（附注：公式在 $r=0$ 时也是合理的）．

5．根据实数序列的相应结果证明：收敛复数序列的极限是唯一的．

6．证明：如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n=S$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{z_n}=\overline{S}$．

7．设 c 表示任意复数，证明：如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n=S$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cz_n=cS$．

8．根据实数级数的对应的结果和第 52 节中的定理，证明：

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n=S$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n=T$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n+w_n)=S+T$．

9．设数列 $z_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 z，证明：存在一个正数 M，对于任意正整数 n，满足不等式 $|z_n|\leqslant M$，用下面提示的方法分别证明

(a)存在一个正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时，满足

181

$$|z_n|=|z+(z_n-z)|<|z|+1$$

(b)记 $z_n=x_n+iy_n$，注意以下实数列定理：

实数列 x_n 和 $y_n(n=1, 2, \cdots)$ 的收敛推出对于正数 M_1 和 M_2，有 $|x_n|\leqslant M_1$ 和 $|y_n|\leqslant M_2(n=1, 2, \cdots)$.

53 泰勒级数

现在我们开始介绍泰勒定理，它是本章最重要的结果之一.

定理 设函数 f 在以 z_0 为心，半径为 R_0 的圆 $|z-z_0|<R_0$ 上处处解析(图 72)，那么 $f(z)$ 有幂级数，表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<R_0), \tag{1}$$

此处

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{2}$$

即当 z 位于上述开圆盘内时，级数(1)收敛于 $f(z)$.

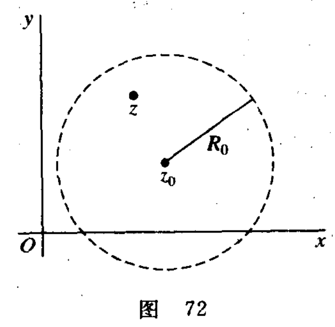


图 72

这是 $f(z)$ 在点 z_0 处的泰勒级数展式. 它是微积分中熟知的泰勒级数应用到单复变函数时的形式. 若令

$$f^{(0)}(z_0)=f(z_0) \quad 和 \quad 0!=1,$$

级数(1)就可以为

182

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots \quad (|z-z_0|<R_0). \tag{3}$$

任何在点 z_0 解析的函数必定关于 z_0 有泰勒级数. 因为，如果 f 在点 z_0 解析，则它在该点的某个领域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内解析(第 23 节)；在泰勒定理的叙述中，ε 可能被当作 R_0 的值. 另外，如果 f 为整函数，R_0 为任意大的数，$|z-z_0|<\infty$，则在有限平面的每一点级数收敛于 $f(z)$.

首先我们证明在 $z_0=0$ 时定理成立. 此时，级数(1)映射为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n}\quad(|z_0|<R_0)\tag{4}$$

这被称为麦克劳林级数．当 z_0 为任意复数时，根据上述方法证明也可立即得到．

为了推导表示式(4)，我们记 $|z|=r$，C_0 表示任何正向环 $|z|=r_0$，其中 $r<r_0<R_0$(参考图 73)．由于 f 在 C_0 内及其上面解析，z_0 为 C_0 的内部点，应用柯西积分公式有



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}.\tag{5}$$

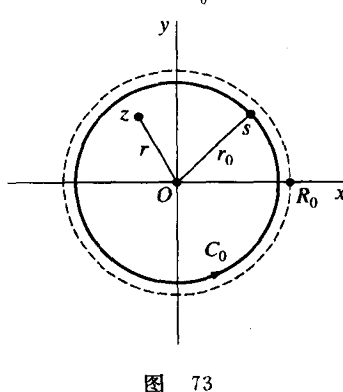


图　73

现在积分因子 $1/(s-z)$ 能分解成如下形式

$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-(z/s)};\tag{6}$$

则从第 52 节的例子知道

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{n}+\frac{z^{N}}{1-z}\tag{7}$$

183

其中 z 为单位圆外任意复数．在等式(7)以 z/s 代替 z，那么我们能够重新写等式(6)如下

$$\frac{1}{s-z}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s^{n+1}}z^{n}+z^{N}\frac{1}{(s-z)s^{N}}.\tag{8}$$

以 $f(s)$乘以该等式，然后在等式两边沿着 C_0 关于 s 积分．则我们知道

$$\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s^{n+1}}z^{n}+z^{N}\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)s^{N}}.$$

根据表达式(5)和第 48 节的如下结论

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

在我们乘以 $1/(2\pi i)$后，则得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n}+\rho_{n}(z),\tag{9}$$

此处

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)s^N}. \tag{10}$$

如果表达式(4)成立，则必须有

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N(z) = 0. \tag{11}$$

为证明该结论，我们令 $|z|=r$，C_0 的半径为 r_0，其中 $r_0>r$，那么，如果 s 为 C_0 上面的点，则我们可以得到

$$|s-z|\geqslant||s|-|z||=r_0-r.$$

因此，如果 M 表示 $f(s)$在 C_0 的最大值，且

$$|\rho_N(z)|\leqslant\frac{r^N}{2\pi}\cdot\frac{M}{(r_0-r)r_0^N}2\pi r_0=\frac{Mr_0}{r_0-r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^N.$$

则只要$(r/r_0)<1$，极限(11)显然成立.

为了证明定理对于以任意点 z_0 为中心、R_0 为半径的圆盘成立，我们假设 f 在 $|z-z_0|<R_0$ 内解析，则复合函数 $f(z+z_0)$一定在 $|(z+z_0)-z_0|<R_0$ 内解析. 当然，后面的不等式恰好为 $|z|<R_0$；又如果我们记 $g(z)=f(z+z_0)$， $g(z)$在圆 $|z|<R_0$ 内的解析性保证存在一个麦克劳林级数表示

[184]

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n \quad (|z|<R_0).$$

也就是说

$$f(z+z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n \quad (|z|<R_0).$$

在该等式中以 $z-z_0$ 代替 z，并且条件合理时，我们有泰勒级数展开式(1).

54 举例

显然，当函数 f 在以 z 为心的圆内处处解析，$f(z)$关于 z_0 的泰勒级数在圆内任意点处必定收敛，级数的收敛无须验证. 事实上，根据泰勒级数定理，级数在圆 C 内收敛于 $f(z)$，其中 C 以 z_0 为心，半径为 z_0 到函数 $f(z)$最近奇点的距离. 在第 59 节，我们将会发现对于任意内点，这其实是该级数收敛于 $f(z)$，并以 z_0 为心的最大圆.

在第 60 节中，我们也可以发现，如果对于以 z_0 为心的任意圆内点 z，存在一系列常数 a_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$，满足

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

那么，不管那些常数如何得到，该幂级数必定为函数 f 关于 z_0 的泰勒级数. 在这些结论中，经常要求我们应用更有效的方法，而不是直接应用泰勒级数定理中的结论 $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$ 去找泰勒级数中的系数 a_n.

在下面的例题中，我们将使用泰勒级数中的结论去找某些简单函数的麦克劳林级数展开式，着重强调了那些展开式在发现其他函数展开式时的应用. 在我们的例题中将应用收敛级数

的性质，例如，第 52 节练习 7 和练习 8 中被证明的性质.

例 1　因为 $f(z)=e^z$ 为整函数，所以 $f(z)$ 对于任意 z 都有合理的麦克劳林级数展开式. $f^{(n)}(z)=e^z$；又因为 $f^{(n)}(0)=1$，则得到

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad(|z|<\infty).\tag{1}$$

185

如果 $z=x+i0$，那么展开式(1)变为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

整函数 z^2e^{3z} 也有麦克劳林级数展开式，得到该式的最简洁方法是在等式(1)的两边以 $3z$ 代替 z，然后再乘以 z^2，则

$$z^2e^{3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}z^{n+2}\quad(|z|<\infty).$$

最后，如果我们以 $n-2$ 代替 n，则有

$$z^2e^{3z}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!}z^n\quad(|z|<\infty).$$

例 2　我们可以应用展开式(1)及定义(第 36 节)

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

找到整函数 $f(z)=\sin z$ 的麦克劳林级数. 为了得到这个结论，我们参考展开式(1)，则可以记，

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{i^nz^n}{n!}\quad(|z|<\infty).$$

但是当 n 为偶数时，$1-(-1)^n=0$，那么我们可以在上式最后那个级数中以 $2n+1$ 代替 n，

$$\sin z=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^{2n+1}]\frac{i^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|z|<\infty).$$

又因为 $1-(-1)^{2n+1}=2$ 和 $i^{2n+1}=(i^2)^ni=(-1)^ni$，则简记为

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|z|<\infty).\tag{2}$$

186

逐项微分将会在第 59 节加以论证. 应用这些结果，我们在等式(2)两边求导，则有

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}z^{2n}.$$

也就是说

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\quad(|z|<\infty).\tag{3}$$

例 3　因为 $\sinh z=-i\sin(iz)$(第 34 节). 我们仅需要在等式(2)的两边以 iz 代替 z，然后乘以 $-i$，则得到

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|z|<\infty).\tag{4}$$

同样，既然 $\cosh z=\cos(iz)$，那么由(3)知

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\quad(|z|<\infty).\tag{5}$$

例如，观察 $\cosh z$ 关于点 $z_0=-2\pi i$ 的泰勒级数．对于任意 z，在等式(5)的两边以 $z+2\pi i$ 代替变量 z，然后应用 $\cosh(z+2\pi i)=\cosh z$，从而

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2\pi i)^{2n}}{(2n)!}\quad(|z|<\infty).$$

例 4 麦克劳林级数表示为

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad(|z|<1).\tag{6}$$

函数 $f(z)=1/(1-z)$ 在 $z=1$ 处不解析，其各阶导数为

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

特别地，$f^{(n)}(0)=n!$．展开式(6)告诉了我们一个无限几何级数的和．此时，z 为相邻项的公比：

[187]

$$1+z+z^2+z^3+\cdots=\frac{1}{1-z}\quad(|z|<1).$$

当然，这是第 52 节例题中的求和公式，它由另外的方法所得到．

如果我们在等式(6)中以 $-z$ 替代 z，并且条件合理，又注意到当 $|z|<1$ 时，$|-z|<1$．则我们知

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n\quad(|z|<1).$$

在另一方面，如果在等式(6)中以 $1-z$ 代替变量 z，那么我们有如下泰勒级数表示

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\quad(|z-1|<1).$$

由于 $|1-z|<1$ 和 $|z-1|<1$ 一样，则有效条件也和展开式(6)的一致．

例 5 设函数为

$$f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{2(1+z^2)-1}{1+z^2}=\frac{1}{z^3}\left(2-\frac{1}{1+z^2}\right)$$

让我们把它展开成关于 z 的幂级数．由于 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析，则我们不可能找到它的麦克劳林级数．但我们的确可以从展开式(6)知道

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+z^8-\cdots\quad(|z|<1).$$

因而当 $0<|z|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z^3}(2-1+z^2-z^4+z^6-z^8+\cdots)=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}-z+z^3-z^5+\cdots.$$

由于 $1/z^3$ 和 $1/z$ 可以分别记为 z^{-3} 和 z^{-1}，则我们可以称它们是关于 z 的负幂项. 对于涉及 $z-z_0$ 负幂的展开定理我们将在下节讨论.

练习[⊖]

1. 证明如下麦克劳林级数表示

$$z\cosh(z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{(2n)!}\quad(|z|<\infty).$$

188

2. 根据下列条件

(a)应用 $f^{(n)}(1)(n=0，1，2，\cdots)$，　(b)记 $e^z=e^{z-1}e$. 得到函数的泰勒级数

$$e^z=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}\quad(|z-1|<\infty)$$

3. 找出下列函数的麦克劳林级数展开式

$$f(z)=\frac{z}{z^4+9}=\frac{z}{9}\cdot\frac{1}{1+(z^4/9)}.$$

答案：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+2}}z^{4n+1}\quad(|z|<\sqrt{3})$.

4. 证明：如果 $f(z)=\sin z$，那么

$$f^{(2n)}(0)=0 \text{ 和 } f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

这样就给出了第 54 节中关于 $\sin z$ 的麦克劳林级数的一个推导.

5. 重新证明第 54 节中函数 $f(z)=\cos z$ 的麦克劳林级数表示(3).

(a)利用第 33 节的定义

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

并且应用第 54 节函数 e^z 的麦克劳林级数表示；

(b)指出 $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$　和　$f^{(2n+1)}(0)=0$　$(n=0，1，2，\cdots)$.

6. 写出函数 $f(z)=\sin(z^2)$的麦克劳林级数表示，然后指出如何得到

$$f^{(4n)}(0)=0\quad\text{和}\quad f^{(2n+1)}(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

7. 证明出如下泰勒级数表示

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}\quad(|z-i|<\sqrt{2}).$$

提示：利用下式

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-(z-i)/(1-i)}.$$

189

⊖ 在下面及随后的练习中，当展开级数时，建议读者尽可能应用第 34 节的(1)及(6).

8. 根据下列恒等式(第 33 节)

$$\cos z=-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right),$$

把 $\cos z$ 展开成关于 $z_0=\pi/2$ 的泰勒级数.

9. 应用第 34 节练习 7(a)中证明的恒等式 $\sinh(z+\pi i)=-\sinh z$ 及 $\sin z$ 的周期为 $2\pi i$ 的结论，写出关于点 $z_0=\pi i$ 的泰勒级数

答案：$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|z-\pi i|<\infty)$.

10. 函数 $\tanh z$ 的麦克劳林级数收敛于 $\tanh z$ 的最大圆周是什么？写出级数非零的前两项.

11. 证明：当 $z\neq 0$ 时

(a) $\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$;

(b) $\frac{\sin(z^2)}{z^4}=\frac{1}{z^2}-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^{10}}{7!}+\cdots$;

12. 推导出下面展开式

(a) $\frac{\sinh z}{z^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!}\quad(0<|z|<\infty)$;

(b) $z^3\cosh\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z}{2}+z^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)!}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}}\quad(0<|z|<\infty)$.

13. 证明：当 $0<|z|<4$ 时

$$\frac{1}{4z-z^2}=\frac{1}{4z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}.$$

55 洛朗级数

如果函数 f 在一点 z_0 处不解析，那么我们不能在该点应用泰勒定理. 然而，我们经常可以找到函数 $f(z)$ 的级数表示，包含 $z-z_0$ 的正幂项和负幂项(参考第 54 节例题 5 和练习 11，12 及 13). 现在我们介绍如此表示的定理，首先我们将介绍洛朗定理.

定理 假设函数 f 在以点 z_0 为心的圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，又设 C 表示任何环绕点 z_0 的正向闭围道，且 C 在定义域内(如图 74)，那么在该定义域中的每一点 z 处，$f(z)$有下列级数表示：

190

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\quad(R_1<|z-z_0|<R_2),\tag{1}$$

此处

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{2}$$

和

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{-n+1}} \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{3}$$

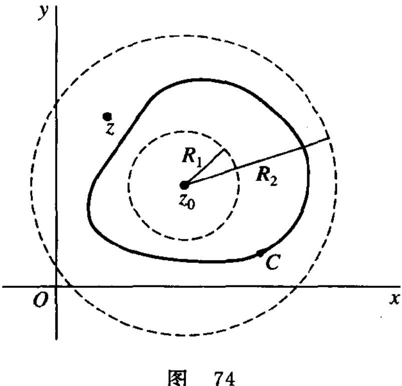


图 74

展开式(1)经常被记为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (R_1 < |z-z_0| < R_2), \tag{4}$$

此处

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{5}$$

形如(1)或者(4)的任意级数，被称为**洛朗级数**.

注意到表达式(3)中的被积函数能记为 $f(z)(z-z_0)^{n-1}$. 显然，当 f 在圆周 $|z-z_0|<R_2$ 内处处解析时，该被积函数也在圆周内解析. 因而，所有的系数 b_n 为 0；又因为(第 48 节)

191

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

则展开式(1)生成一个关于点 z_0 的泰勒级数.

然而，如果 f 在圆周 $|z-z_0|<R_2$ 内除点 z_0 外均解析，那么 R_1 可以选择任意小，则表示(1)在有孔圆周 $0<|z-z_0|<R_2$ 是合理的. 同样地，如果在有限平面上对于圆周 $|z-z_0|=R_1$ 外每一点均解析，则表示(1)在 $R_1<|z-z_0|<\infty$ 内也成立. 注意到如果 f 在有限平面除点 z_0 外处处解析，则级数(1)在任意解析点或者在 $0<|z-z_0|<\infty$ 内成立.

开始我们将证明当 $z_0=0$ 时洛朗定理成立，在这种情况下环形区域以原点为中心，当 z_0 为任意点时，定理的证明同样可以得到.

为了证明该定理，我们首先作一个包含在区域 $R_1<|z|<R_2$ 内的闭环形区域 $r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$，它又包含 z 和围道 C(图 75)，我们设 C_1 和 C_2 分别表示圆周 $|z|=r_1$ 和 $|z|=r_2$，然后，再确定两个圆的正向绕向. 我们可以看到 f 在 C_1，C_2 及其之间的环形区域均解析.

接着，我们构造以 z 为心的正向圆周 γ，小到足能为环形区域 $r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$ 所包含(如图 75 所示). 那么由关于解析函数沿多连通区域的正向边界积分的柯西-古萨定理的推广形式(46 节定理 2)知道

$$\int_{C_2}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}-\int_{C_1}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}-\int_{\gamma}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}=0.$$

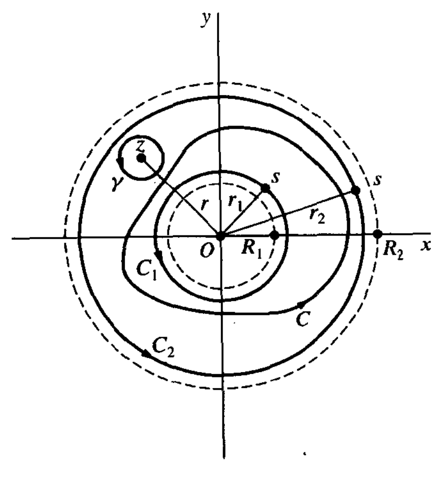


图 75

192

但是根据柯西积分公式，第三个积分的积分值为 $2\pi i f(z)$，因而

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{z-s}. \tag{6}$$

现在，在上面第一个积分中的因子 $f(z)=1/(s-z)$ 和第 53 节证明泰勒定理时的表达式(5)相同，在这里我们将需要在上节应用的展开式

$$\frac{1}{s-z}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s^{n+1}}z^n+z^N\frac{1}{(s-z)s^N}, \tag{7}$$

至于第二个积分的因子 $1/(z-s)$，我们通过映射等式(7)的 s 和 z 得到

$$\frac{1}{z-s}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s^{-n}}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{z^N}\cdot\frac{s^N}{z-s}.$$

如果我们在这儿以 $n-1$ 取代求和指标 n，那么展开式有如下形式

$$\frac{1}{z-s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{s^{-n+1}}\cdot\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^N}\cdot\frac{s^N}{z-s}, \tag{8}$$

在下面的叙述中我们需要此结论.

以 $f(s)/(2\pi i)$ 乘以等式(7)和(8)，然后在两边分别沿着 C_2 和 C_1 关于 s 积分，由表达式(6)，我们知道

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a_nz^n+\rho_N(z)+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{z^n}+\sigma_N(z), \tag{9}$$

其中数 $a_n(n=0,1,2,\cdots,N-1)$ 和 $b_n(n=1,2,\cdots,N)$ 由下列不等式确定

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s^{n+1}},\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s^{-n+1}} \tag{10}$$

并且

$$\rho_N(z)=\frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-z)s^N},\quad \sigma_N(z)=\frac{1}{2\pi iz^N}\int_{C_1}\frac{s^Nf(s)\mathrm{d}s}{z-s}$$

假设当 N 趋向于∞时，

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N(z)=0\quad 和\quad \lim_{N\to\infty}\sigma_N(z)=0\tag{11}$$

193

则表达式(9)肯定在区域 $R_1<|z|<R_2$ 内有可能的洛朗级数形式．下面我们将仿照第53节中证明泰勒定理的方法去确定这些极限．记 $|z|=r$，且 r 满足 $r_1<r<r_2$；又设 M 为 $|f(s)|$ 在 C_1 和 C_2 的最大值．我们也注意到，如果 s 为 C_2 上面的点，那么 $|s-z|\geqslant r_2-r$；同理，如果 s 在 C_1 上面，那么有 $|z-s|\geqslant r-r_1$，则我们可以记

$$|\rho_N(z)|\leqslant\frac{Mr_2}{r_2-r}\left(\frac{r}{r_2}\right)^N\quad 和\quad |\sigma_N(z)|\leqslant\frac{Mr_1}{r-r_1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^N$$

既然 $(r/r_2)<1$ 和 $(r_1/r)<1$，那么 $\rho_N(z)$ 和 $\sigma_N(z)$ 均收敛．

最后，我们仅利用第46节的性质2，可以用围道 C 取代积分(10)中的围道．由于如果 z 作为积分变量代替 s，关于系数 a_n 和 b_n 的表达式(10)与表达式(2)和(3)相同，故在 $z_0=0$ 时，洛朗定理得到证明．

为了把证明推广到 z_0 为无限平面上的任意点时的一般情况，我们设 f 为满足定理条件的函数．仿照泰勒定理的证明，我们记 $g(z)=f(z+z_0)$；由于 $f(z)$ 在环形区域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 解析．则函数 g 在 $R_1<|(z+z_0)-z_0|<R_2$ 内时解析．即函数 $f(z+z_0)$ 在以原点为心的环形区域 $R_1<|z|<R_2$ 内解析．现在，上述定理中简单闭围道 C 有参数表示 $z=z(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$．其中对于任意 $t\in\{t\mid a\leqslant t\leqslant b\}$ 有

$$R_1<|z(t)-z_0|<R_2\tag{12}$$

因而，如果 Γ 表示路径

$$z=z(t)-z_0\quad (a\leqslant t\leqslant b),\tag{13}$$

那么 Γ 不仅为简单闭围道，而且根据不等式(12)，它包含在区域 $R_1<|z|<R_2$ 内，从而 $g(z)$ 有如下洛朗级数表示

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}\quad (R_1<|z|<R_2),\tag{14}$$

此处

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(z)\mathrm{d}z}{z^{n+1}}\quad (n=0,1,2,\cdots),\tag{15}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(z)\mathrm{d}z}{z^{-n+1}}\quad (n=1,2,\cdots).\tag{16}$$

在条件 $R_1<|z|<R_2$ 的情况下，如果我们在等式(14)以 $f(z+z_0)$ 取代 $g(z)$，然后以 $z-z_0$ 代替 z，那么可以得到表达式(4)，从而系数 a_n 的表达式(15)和表达式(2)相同．由于

194

$$\int_\Gamma\frac{g(z)\mathrm{d}z}{z^{n+1}}=\int_a^b\frac{f[z(t)]z'(t)}{[z(t)-z_0]^{n+1}}\mathrm{d}t=\int_C\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

同理，表达式(6)的系数 b_n 和表达式(3)中的相同.

56 举例

通常洛朗级数中的系数是按照其他方法而不是直接应用它们的积分表示求得. 在下面的例题中一直假设，当环形区域为特定区域时，关于给定函数的洛朗级数是唯一的. 我们将在第60节推导它及泰勒级数的唯一性证明.

例 1 在下面麦克劳林级数展开式中以 $1/z$ 取代 z

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (|z| < \infty),$$

则我们有如下洛朗级数表示

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty).$$

上面级数没有关于 z 的正幂项，即正幂项系数为 0. 又 $1/z$ 的系数为 1，因而根据第 55 节的洛朗定理，系数为数 b_1，并且

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/z}\mathrm{d}z,$$

其中 C 为任意围绕原点的正向简单闭围道. 既然 $b_1 = 1$，那么

$$\int_C e^{1/z}\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

195 对于计算沿着简单闭围道积分的方法，将直接在第 6 章予以详细讨论.

例 2 函数 $f(z) = 1/(z-i)^2$ 有麦克劳林级数展开式，其中 $z_0 = i$，即

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-i)^n \quad (0 < |z-i| < \infty),$$

其中 $c_{-2} = 1$，所有其他的系数为零. 由第 55 节关于麦克劳林级数中系数的结论(5)，我们知道

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^{n+3}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

其中 C 为任意关于点 $z_0 = i$ 的正向围道 $|z-i| = R$. 因而有(对照第 40 节练习 10)

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0, n \neq -2 \\ 2\pi i, n = -2 \end{cases}$$

例 3 函数为

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}, \tag{1}$$

它有两个奇点 $z=1$ 和 $z=2$，并且在区域 $|z|<1$，$1<|z|<2$ 和 $2<|z|<\infty$ 中解析，分别以 D_1 和 D_2 表示这些区域(图 76)，$f(z)$ 有 z 幂的级数表示. 我们可以利用第 54 节例题结论(见下式)得到它们的表达式

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

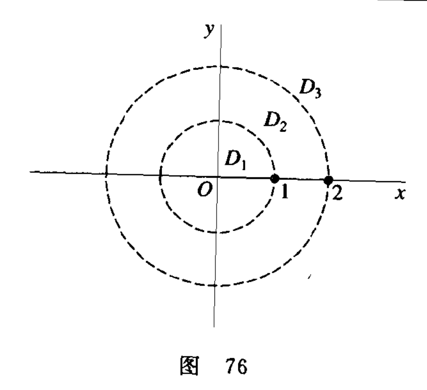


图 76

196

在 D_1 中级数表示为麦克劳林级数，为了得到它，我们记

$$f(z)=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z/2)}$$

又注意到，由于在 D_1 中 $|z|<1$ 和 $|z/2|<1$，则

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-1)z^n \quad (|z|<1). \tag{2}$$

至于 D_2 中的表示，我们记为

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(1/z)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z/2)}.$$

由于在 $1<|z|<2$ 时，有 $|1/z|<1$ 和 $|z/2|<1$，则得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (1<|z|<2).$$

如果我们在上面第一个级数中以 $n-1$ 代替求和指标 n，然后又交换两个级数，那么我们能够得到和洛朗定理中同样形式的展开式(第 55 节)：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (1<|z|<2). \tag{3}$$

事实上，既然 $f(z)$在环形区域 $1<|z|<2$ 内有如此表示，则展开式(3)为 $f(z)$的洛朗级数.

$f(z)$在无界区域 D_3 的表示也是洛朗级数. 如果我们把展开式(1)映射为如下形式

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(1/z)}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(2/z)}$$

又注意到当 $2<|z|<\infty$时，$|1/z|<1$ 和 $|2/z|<1$，那么我们得到下列形式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}} \quad (2<|z|<\infty).$$

即

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^{n-1}}{z^n} \quad (2<|z|<\infty). \tag{4}$$

197

练习

1. 写出下面函数在区域 $0<|z|<\infty$ 内的洛朗级数

$$f(z)=z^2\sin\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

答案：$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{4n}}$.

2. 推导出下列洛朗级数表示

$$\frac{e^z}{(z+1)^2}=\frac{1}{e}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+2)!}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]\quad(0<|z+1|<\infty).$$

3. 当 $1<|z|<\infty$ 时，写出下面函数关于 z 的负幂项的合理表示

$$f(z)=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+(1/z)}.$$

答案：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}$.

4. 给出下列函数关于 z 幂的两个洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)},$$

并且指出该级数的合理区域.

答案：$\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\quad(0<|z|<1)$； $-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^n}\quad(1<|z|<\infty)$.

5. 按下列条件表示函数

$$f(z)=\frac{z+1}{z-1}$$

(a)展开为麦克劳林级数，然后指出其合理范围；

(b)展开为区域($1<|z|<\infty$)的洛朗级数.

答案：(a) $-1-2\sum_{n=1}^{\infty}z^n\quad(|z|<1)$； (b) $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

6. 证明：当 $0<|z-1|<2$ 时

198

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}=-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{2(z-1)}.$$

7. 写出下列函数在特定区域关于 z 幂的两个洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$$

然后指出这些区域范围.

答案：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{2n+1}+\frac{1}{z}\quad(0<|z|<1)$； $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}\quad(1<|z|<\infty)$.

8. (a)假设 a 为一个实数，其中 $-1<a<1$，推导如下洛朗级数表示

$$\frac{a}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}\quad(|a|<|z|<\infty).$$

(b)在(a)中记推导出的方程式里的 $z=e^{i\theta}$，然后利用结果两边实部和虚部分别相等，推导求和公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\theta=\frac{a\cos\theta-a^2}{1-2a\cos\theta+a^2}\quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin n\theta=\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

其中 $-1<a<1$(比较第 52 节练习 4).

9. 假设级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

在某圆环 $R_1<|z|<R_2$ 收敛于解析函数 $X[z]$，和 $X[z]$称为 $x[n](n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$[㊀] 的 z-映射. 下面应用第 55 节表达式(5)证明：如果圆环 $R_1<|z|<R_2$ 包含单位圆 $|z|=1$，那么 $X[z]$的 z-逆映射可以记为

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{i\theta})e^{in\theta}\mathrm{d}\theta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

10. (a)设 z 为任意复数，C 表示平面上的单位圆

$$w=e^{i\phi}\quad(-\pi\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

199

那么应用第 55 节表达式(5)围道证明：

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)w^n\quad(0<|w|<\infty),$$

其中 $J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[-i(n\phi-z\sin\phi)]\mathrm{d}\phi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

(b)依据第 37 节练习 4，证明：(a)中的系数可以记为[㊁]

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(n\phi-z\sin\phi)\mathrm{d}\phi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

11. (a)设函数 $f(z)$在包含单位圆 $z=e^{i\phi}(-\pi\leqslant\phi\leqslant\pi)$的某一个关于原点的圆环区域中解析. 以单位圆为第 55 节表达式(2)和(3)的积分路径，证明：对于圆环区域中任意点 z，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\phi})\mathrm{d}\phi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n+\left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right]\mathrm{d}\phi$$

(b)记 $u(\theta)=\mathrm{Re}[f(e^{i\theta})]$，证明：从(a)中展开式可以导出

$$u(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\phi)\mathrm{d}\phi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}u(\phi)\cos[n(\theta-\phi)]\mathrm{d}\phi.$$

㊀ 在研究离散时间线性系统中需要应用 z-映射. 例如，参考附录 A 中 Oppenheim，Schafer，and Buch 的著作.

㊁ 系数 $J_n(z)$称为第一类贝塞尔函数，它们在应用数学特定领域占有重要地位. 例如，参考作者的书 *Fourier Series and Boundary Value Problems*，6th ed.，Chap. 8，2001.

上式为实值函数 $u(\theta)$ 在区域 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上的傅里叶级数展开式的一种形式[⊖].

57 幂级数的绝对收敛和一致收敛

本节和以下三节主要是介绍幂级数的各种性质. 为了尽快阅读第 61 节, 读者可以先承认 200 本节定理和性质, 跳过它们的证明.

我们从第 52 节知道, 如果复数的绝对值组成的级数收敛, 那么这些复数组成的级数绝对收敛. 下面的定理将考虑幂级数的绝对收敛.

定理 1 如果幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{1}$$

在 $z=z_1\,(z_1\neq z_0)$ 时收敛, 那么它在开圆盘 $|z-z_0|<R_1$ 内的任意点 z 处绝对收敛, 其中 $R_1=|z_1-z_0|$ (图 77).

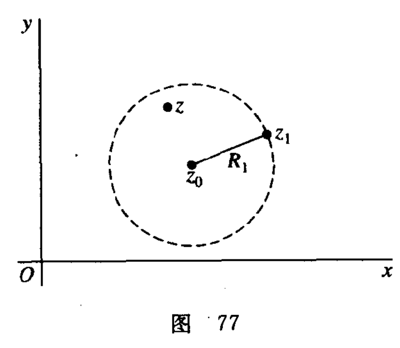


图 77

首先我们在 $z_0=0$ 时证明定理, 假设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \quad (z_1\neq 0)$$

收敛. 通项 $a_n z_1^n$ 为有界的, 即存在正常数 M, 满足(参考第 52 节)

$$|a_n z_1^n| \leqslant M \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

如果 $|z|<|z_1|$, 又设 ρ 表示模 $|z/z_1|$, 那么我们可以知道

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqslant M\rho^n \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

其中 $\rho<1$. 现在, 通项为实数 $M\rho^n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 的级数为几何级数, 当 $\rho<1$ 时, 该级数收敛. 因而, 根据实级数的比较法, 则级数

201
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

在开圆盘 $|z|<|z_1|$ 收敛; 当 $z_0=0$ 时, 定理得证.

⊖ 至于充分条件, 参考练习 10 所引著作 31 节和 32 节.

当 z_0 为任意非零数时，我们假设级数(1)在 $z=z_0$ 时收敛. 如果我们记 $w=z-z_0$，级数(1)变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \tag{2}$$

该级数在 $w=z_1-z_0$ 时收敛. 因而，既然 $z_0=0$ 时，定理显然正确，则我们知道级数(2)在开圆盘 $|w|<|z_1-z_0|$ $(z_1\neq z_0)$内绝对收敛. 最后，当条件合理时，在级数(2)中以 $z-z_0$ 代替 w；同时，记 $R_1=|z_1-z_0|$，则我们根据上述方法可以得到定理的证明.

定理告诉我们以 z_0 为心的某一个圆周内所有点的集合为级数(1)收敛区域，保证级数在除 z_0 外的点收敛. 我们把以 z_0 为心，且使级数(1)在其内任意点都收敛的最大圆称为级数的**收敛圆**. 根据此定理，级数不可能在收敛圆外的任意点 z_2 处收敛. 因为，如果级数收敛，它将在以 z_0 为心且包含 z_2 的圆内每一点都收敛. 所以第一个圆不是收敛圆.

我们先来定义一些必要的术语，这些术语将在下一条定理中涉及. 假设级数(1)有收敛圆 $|z-z_0|=R$，又设 $S(z)$和 $S_N(z)$分别为级数的和及部分和，如下

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, S_N(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a_n(z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<R).$$

然后记余项函数为

$$\rho_N(z)=S(z)-S_N(z) \quad (|z-z_0|<R). \tag{3}$$

由于在 $|z-z_0|<R$ 时，幂级数对于任意不动点 z 收敛，则我们知道，对于任意点 z，当 N 趋于∞时，余项函数 ρ_N 趋于零. 根据第 51 节数列极限的定义(2)，相应地意味着对于每一个正数，存在正整数 N_ε，满足

$$|\rho_N(z)|<\varepsilon, 其中\ N>N_\varepsilon \tag{4}$$

当 N_ε 的选择仅和 ε 的值有关，而和收敛圆中指定区域内每点无关时，则在指定区域级数收敛是一致的.

202

定理 2　如果 z_1 为下列幂级数收敛圆 $|z-z_0|=R$ 内一点，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{5}$$

那么该级数在闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant R_1$ 内必定一致收敛，其中 $R_1=|z_1-z_0|$（图 78).

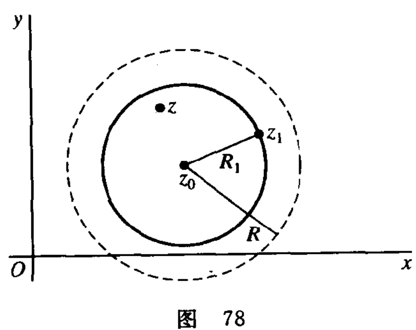


图　78

仿照定理1的证明，首先我们处理 $z_0=0$ 时的情况. 在级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{6}$$

的收敛圆内给定一点 z_1，我们注意到存在模大于 $|z_1|$ 的点使级数收敛，那么根据定理1，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n| \tag{7}$$

收敛. 设 m 和 N 表示正整数，此处 $m>N$. 我们可以分别记级数(6)和(7)的余项函数为

$$\rho_N(z) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=N}^{m} a_n z^n \tag{8}$$

和

203

$$\sigma_N = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|, \tag{9}$$

现在我们根据第52节练习3

$$|\rho_N(z)| = \lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right|;$$

并且，当 $|z|\leqslant|z_1|$ 时

$$\left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right| \leqslant \sum_{n=N}^{m} |a_n||z|^n \leqslant \sum_{n=N}^{m} |a_n||z_1|^n = \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|$$

因而，当 $|z|\leqslant|z_1|$ 时

$$|\rho_N(z)| \leqslant \sigma_N. \tag{10}$$

由于 σ_N 为收敛级数的余项，它们随 N 趋向于∞时而趋向于0，即对于每一个正数 ε，存在整数 N_ε，满足

$$\sigma_N < \varepsilon, 其中\ N > N_\varepsilon \tag{11}$$

由于条件(10)和(11)，那么条件(4)对于圆盘 $|z|\leqslant|z_1|$ 所有点成立，并且 N_ε 的值和 z 的选择无关. 因而，级数(6)在该圆盘内一致收敛.

当然，把证明推广到 z_0 为任意点的情形，可以在级数(5)中代入 $w=z-z_0$ 而得到. 因为由定理假设 $z-z_0$ 为级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

收敛圆 $|w|=R$ 内的点. 由于我们知道上述级数在圆盘 $|w|\leqslant|z_1-z_0|$ 内一致收敛，则在定理中叙述的结论是显然的.

58 幂级数和的连续性

下面我们的定理是关于级数一致收敛的重要结论，这是前一节讨论的结果.

定理　幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{1}$$

表示在其收敛圆 $|z-z_0|=R$ 内每一点连续的函数 $S(z)$.

204

该定理可以另外叙述为：如果 $S(z)$ 表示级数(1)在其收敛圆 $|z-z_0|=R$ 内的和，z_1 为圆内任意一点. 那么，对于每一个正数 ε，存在正数 δ，满足

$$|S(z)-S(z_1)|<\varepsilon, \text{其中} \ |z-z_1|<\delta \tag{2}$$

其中常数 δ 足够小，以致 z 存在于 $S(z)$ 的定义域 $|z-z_0|<R$ 中[参看第 17 节连续性的定义(4)].

为了证明此定理，我们假设 $S_N(z)$ 表示级数前 N 项和，又记余项函数为

$$\rho_N(z)=S(z)-S_N(z) \quad (|z-z_0|<R)$$

那么，因为

$$S(z)=S_N(z)+\rho_N(z) \quad (|z-z_0|<R)$$

我们可以知道

$$|S(z)-S(z_1)|=|S_N(z)-S_N(z_1)+\rho_N(z)-\rho_N(z_1)|,$$

或者

$$|S(z)-S(z_1)|\leqslant|S_N(z)-S_N(z_1)|+|\rho_N(z)|+|\rho_N(z_1)|. \tag{3}$$

如果 z 为半径 R_0 大于 $|z_1-z_0|$. 但是小于级数收敛圆半径 R 的闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant R_0$ 内任意一点(看图 79). 由第 57 节定理 2 中的一致收敛性，存在正整数 N_ε，满足

$$|\rho_N(z)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{其中} \ N>N_\varepsilon. \tag{4}$$

特别地，当 z_1 的邻域 $|z-z_1|<\delta$ 包含在圆盘 $|z-z_0|\leqslant R_0$ 时，对于 $|z-z_1|<\delta$ 中每一点，条件(4)成立.

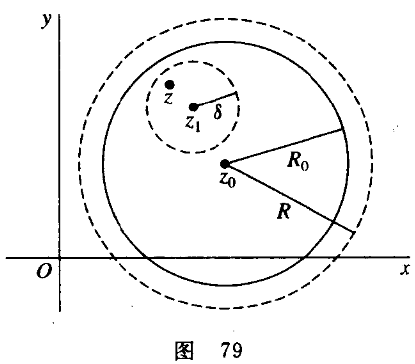


图　79

205

现在部分和 $S_N(z)$ 为一个多项式. 因而，对于每一个 N 值，它在 z_1 处均连续. 特别地，当 $N=N_\varepsilon+1$ 时，我们可以选择 δ 任意小，满足

$$|S_N(z)-S_N(z_1)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{其中} \ |z-z_1|<\delta. \tag{5}$$

在不等式(3)记 $N=N_\varepsilon+1$，又应用(4)和(5)在 $N=N_\varepsilon+1$ 时成立的事实，我们可以得出

$$|S(z)-S(z_1)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3},\text{其中 } |z-z_1|<\delta.$$

这就是表述(2)，则性质马上得证.

记 $\omega=1/(z-z_0)$，为了应用下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n},\tag{6}$$

我们修改前一节的两个定理和本节的定理. 例如，如果级数(6)在点 $z_1(z_1\neq z_0)$ 处收敛，那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n w^n$$

在满足下式时

$$|w|<\frac{1}{|z_1-z_0|}.\tag{7}$$

必定绝对收敛于一个连续函数. 因而，由于不等式(7)和 $|z-z_0|>|z_1-z_0|$ 一致，级数(6)在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 外的区域一致收敛于一个连续函数，其中 $R_1=|z_1-z_0|$. 另外，我们知道如果在圆环 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内，洛朗级数表示

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

是成立的. 那么上式右边的两个级数在任何位于上述圆环内的闭圆环一致收敛.

59　幂级数的积分和微分

我们已经知道幂级数

206

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\tag{1}$$

表示对于其收敛圆内每一点连续的函数. 在本节里，我们将证明 $S(z)$ 事实上在收敛圆内解析. 我们的证明需要下面定理，其本身令人很感兴趣.

定理 1　*设 C 表示幂级数(1)的收敛圆内任意围道，$g(z)$ 为 C 上连续的任意函数. 在幂级数的每一项乘以 $g(z)$ 后得到的级数可以沿着 C 逐项积分，即*

$$\int_C g(z)S(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_C g(z)(z-z_0)^n\mathrm{d}z.\tag{2}$$

为证明该定理，我们注意到由于 $g(z)$ 和幂级数的和 $S(z)$ 均为 C 上连续，积分

$$g(z)S(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n g(z)(z-z_0)^n+g(z)\rho_N(z),$$

沿着 C 的积分存在. 此处 $\rho_N(z)$ 为所给级数 N 项后的余项，有限和中的项也在 C 上连续. 故它们沿着 C 的积分也存在. 因此，我们可记

$$\int_C g(z)S(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n \mathrm{d}z + \int_C g(z)\rho_N(z)\mathrm{d}z. \tag{3}$$

现在设 M 为 $|g(z)|$ 在 C 上的最大值，L 表示 C 的长度．根据幂级数的一致收敛性(第 57 节)，我们知道对于每一个正数 ε，存在正整数 N_ε，对于 C 上所有点 z，满足

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon, \text{其中 } N > N_\varepsilon.$$

由于 N_ε 和 z 无关，我们可以发现

$$\left|\int_C g(z)\rho_N(z)\mathrm{d}z\right| < M\varepsilon L, \text{其中 } N > N_\varepsilon;$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\int_C g(z)\rho_N(z)\mathrm{d}z = 0.$$

207

因而，由等式(3)可以推出

$$\int_C g(z)S(z)\mathrm{d}z = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n \mathrm{d}z.$$

这是等式(2)，则定理 1 得到证明．

如果对于幂级数(1)的收敛圆中开圆盘内的每点有 $|g(z)|=1$，又 $n=0,1,2,\cdots$时，$(z-z_0)^n$ 为整函数，则对于此区域中的每闭围道 C 有

$$\int_C g(z)(z-z_0)^n \mathrm{d}z = \int_C (z-z_0)^n \mathrm{d}z = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

根据等式(2)，那么对于每条这样的围道知道

$$\int_C S(z)\mathrm{d}z = 0$$

又根据莫勒拉定理(第 48 节)；函数 $S(z)$在区域内处处解析．我们可以把该结果作为一个性质予以叙述．

推论　幂级数(1)的和 $S(z)$在其收敛圆周内每一内点处解析．

该性质将经常在确定函数的解析性和估计极限时应用到．

例 1　证明：根据下式定义的函数为整函数

$$f(z) = \begin{cases} (\sin z)/z, z \neq 0 \\ 1, z = 0 \end{cases}$$

由于对每一个 z 值，麦克劳林级数展开式

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

表示 $\sin z$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots, \tag{4}$$

可以通过麦克劳林级数中每项除以 z 得到，当 $z\neq0$ 时收敛于 $f(z)$．但是级数(4)显然在 $z=0$ 时收敛于 $f(0)$，故对于任意 z，$f(z)$可以被收敛幂级数表示．因而 f 是一个整函数．既然 f 在 $z=0$ 时连续，又 $z\neq0$ 时，$(\sin z)/z=f(z)$，则

208

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = 1. \tag{5}$$

因为上述极限为 $\sin z$ 在 z_0 处导数的极限，所以结果很显然.

在第 54 节开头，我们观察到对于以 z_0 为圆心且过最近的 f 的不解析点 z_1 的圆周内任意点，函数 f 关于 z_0 的泰勒级数收敛于 $f(z)$. 根据上面性质，现在我们知道关于 z_0 点不存在更大的圆周，使得对于该圆周中任意内点函数 f 的泰勒级数收敛于 $f(z)$. 因为，如果存在这样的圆周，那么 f 在 z_1 处解析. 但是，事实上 f 在 z_1 处不解析.

现在我们给出定理 1 的对应形式.

定理 2 幂级数(1)可以逐项微分，即对于该级数收敛圆周内任意内点 z

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \tag{6}$$

为证明此点，设 z 表示级数(1)收敛圆内的任意点，C 为正向简单闭围道，且包含于收敛圆周中. 另外对于 C 上任意点定义下列函数

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(s - z)^2} \tag{7}$$

既然 $g(s)$在 C 上连续，定理告诉我们

$$\int_C g(s) S(s) \mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s)(s - z_0)^n \mathrm{d}s. \tag{8}$$

现在 $S(s)$在 C 内和 C 上解析，则根据第 48 节导数的积分表示，我们记

$$\int_C g(s) S(s) \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s) \mathrm{d}s}{(s - z)^2} = S'(z)$$

从而

$$\int_C g(s)(s - z_0)^n \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(s - z_0)^n}{(s - z)^2} \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z - z_0)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

209

故等式(8)推出

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z - z_0)^n,$$

该式和等式(6)一致，则完成证明.

例 2 在第 54 节例题中，我们看到

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1).$$

在上式的每一边求导推得

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z - 1)^{n-1} \quad (|z - 1| < 1),$$

或者

$$\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n \quad (|z-1|<1).$$

60　级数表示的唯一性

泰勒级数和洛朗级数表示的唯一性分别在第 54 节和第 56 节已涉及，可以由第 59 节的定理 1 得到. 我们首先考虑泰勒级数表示的唯一性.

定理 1　如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

对于圆 $|z-z_0|=R$ 内的所有点收敛于 $f(z)$，那么它是 f 关于 $z-z_0$ 的泰勒级数展开式.

为证明此定理，我们记该级数表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<R) \tag{2}$$

在定理假设中应用求和指数 m 有

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-z_0)^m \quad (|z-z_0|<R).$$

210

那么应用第 59 节定理 1，我们可以记

$$\int_C g(z)f(z)\mathrm{d}z=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_C g(z)(z-z_0)^m\mathrm{d}z, \tag{3}$$

其中 $g(z)$ 为函数列

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

的任意一个，C 是以 z_0 为圆心、半径小于 R 的圆周.

根据第 48 节柯西积分公式的广义形式(5)(也可以看第 59 节性质)，我们可以发现

$$\int_C g(z)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}; \tag{5}$$

又由于(看第 40 节练习 10)

$$\int_C g(z)(z-z_0)^m\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n-m+1}}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases} \tag{6}$$

显然有

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_C g(z)(z-z_0)^m\mathrm{d}z=a_n. \tag{7}$$

由于等式(5)和(7)，等式(3)立即推出

$$\frac{f^n(z_0)}{n!}=a_n,$$

这证明事实上级数(2)是 f 关于 z_0 的泰勒级数.

如果级数在 z_0 的邻域内收敛于 0，那么系数 a_n 必定为 0. 该结论如何从定理 1 中推出呢？下面我们的定理是考虑洛朗级数表示的唯一性.

定理 2 如果级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{8}$$

211 对于 z_0 的圆环区域内所有点收敛于 $f(z)$，那么它是 f 在该区域关于 $z-z_0$ 的洛朗级数展开式.

证明的方法和在定理 1 的证明中应用的相似，本定理的假设告诉我们，存在 z_0 的圆环区域，对于其中任意 z，满足

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

设 $g(z)$和等式(4)的定义一样，但是现在要求 n 也可以为负整数. 另外，设 C 为包含圆环，以 z 为心，正向的任意圆周. 那么应用求和指标 m，对包含负幂和正幂的级数使用第 59 节定理 1（练习 10），可记

$$\int_C g(z)f(z)\mathrm{d}z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_0)^m \mathrm{d}z,$$

或者

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_0)^m \mathrm{d}z. \tag{9}$$

由于等式(6)在 m 和 n 均为负整数时也是合理的，则等式(9)推出

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = c_n,$$

也就是第 55 节 f 在圆环的洛朗级数的系数表达式(5).

练习

1. 在对下列麦克劳林级数表示求导

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1),$$

得到展开式

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z|<1);$$

和

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n \quad (|z|<1).$$

212

2. 在练习 1 成立的下列展开式中以 $1/(1-z)$代替 z

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z|<1),$$

推导下列洛朗级数表示

$$\frac{1}{z^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)}{(z-1)^n}\quad (1<|z-1|<\infty).$$

(对比第 59 节练习 2).

3. 找出下列函数在点 $z_0=2$ 的泰勒级数

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2}$$

那么根据级数逐项求导，证明：

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n\quad (|z-2|<2).$$

4. 利用级数证明如下定义的函数

$$f(z)=\begin{cases}(e^z-1)/z, z\neq 0\\ 1, z=0\end{cases}$$

为整函数.

5. 证明：如果

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\cos z}{z^2-(\pi/2)^2}, z\neq\pm\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{1}{\pi}, z=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

那么 f 是整函数.

6. 在 w 平面上，沿着收敛圆周内的路径从 $w=1$ 到 $w=z$ 对下列泰勒级数展开式(看第 54 节练习 4)积分

$$\frac{1}{w}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(w-1)^n\quad (|w-1|<1)$$

得到如下表示

$$\mathrm{Log}z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n\quad (|z-1|<1).$$

[213]

7. 利用练习 6 的结果. 证明：如果

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\log z}{z-1}, z\neq 1\\ 1, z=1\end{cases}$$

那么 f 在区域 $0<|z|<\infty$，$-\pi<\mathrm{Arg}z<\pi$ 内处处解析.

8. 证明：如果 f 在点 z_0 处解析，$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m)}(z_0)=0$，那么如下定义的函数 g，

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}, z\neq z_0\\ \dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}, z=z_0\end{cases}$$

在点 z_0 处解析.

9. 假设函数 $f(z)$在圆周 $|z-z_0|=R$ 内有幂级数表示

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

利用第 59 节关于级数逐项求导的定理 2 和数学归纳法，证明：当 $|z-z_0|<R$ 时，

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!}a_{n+k}(z-z_0)^k\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

然后，令 $z=z_0$，证明：系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$为 f 关于 z_0 点泰勒级数的系数. 因此为第 60 节定理 1 给出了一个有效证明.

10. 考虑在以 z_0 为心的圆环内收敛的两个级数

$$S_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad S_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

设 C 为包含在该圆环的任意围道，$g(z)$为 C 上连续的函数. 已知

$$\int_C g(z)S_1(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_C g(z)(z-z_0)^n\mathrm{d}z,$$

修改第 59 节定理 1 的证明，从而证明

214

$$\int_C g(z)S_2(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_C\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z.$$

从上述结果可以得出下列结论，如果

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

那么

$$\int_C g(z)S(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_C g(z)(z-z_0)^n\mathrm{d}z.$$

11. 证明：函数

$$f_2(z)=\frac{1}{z^2+1}\quad(z\neq\pm i)$$

把下列函数解析延拓

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}\quad(|z|<1)$$

到 z 平面除 $z=\pm i$ 外的区域.

12. 证明：函数 $f_2(z)=1/z^2(z\neq0)$解析延拓(第 26 节)下列函数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n\quad(|z+1|<1)$$

到 z 平面除 $z=0$ 外的区域.

61　幂级数的乘法和除法

假设下面每个级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ 和 } \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

在圆周 $|z-z_0|=R$ 内收敛，那么它们的和 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别是圆盘 $|z-z_0|<R$ 内的解析函数（第 59 节），其和的乘积有一个合理的泰勒级数展开式

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<R). \tag{2}$$

215

根据第 60 节定理 1，级数(1)本身是泰勒级数，因而级数(2)的前三个系数为如下等式

$$c_0=f(z_0)g(z_0)=a_0b_0,$$

$$c_1=\frac{f(z_0)g'(z_0)+f'(z_0)g(z_0)}{1!}=a_0b_1+a_1b_0,$$

和

$$c_2=\frac{f(z_0)g''(z_0)+2f'(z_0)g'(z_0)+f''(z_0)g(z_0)}{2!}=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0.$$

通过参考莱布尼兹准则（练习 6），很容易得到系数 c_n 的通项表达式

$$[f(z)g(z)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z), \tag{3}$$

为两个可微函数乘积的 n 次导数．此处

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k=0,1,2,\cdots,n),$$

通常 $f^{(0)}(z)=f(z)0!=1$，显然

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot\frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k};$$

所以展开式(2)可以记为(4)

$$\begin{aligned} f(z)g(z)=&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(z-z_0)\\ &+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(z-z_0)^2+\cdots\\ &+\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)(z-z_0)^n+\cdots \quad (|z-z_0|<R). \end{aligned} \tag{4}$$

级数(4)内两个级数逐项相乘后，累加幂 $z-z_0$ 的结果项得到的级数，为两个级数的柯西积．

例 1　函数 $e^z/(1+z)$ 有奇异点 $z=-1$，所以麦克劳林级数表示在开圆盘 $|z|<1$ 内是合理的．通过下式

216

$$\frac{e^z}{1+z}=e^z\,\frac{1}{1-(-z)}=\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)\quad(1-z+z^2-z^3+\cdots)$$

然后逐项乘以两个级数，则前三个非零项很容易发现，为了精确，我们可以以1乘以第一个级数中的每一项，接着以$-z$乘以该级数的每一项，等等．下面的级数暗示，z幂项相似则其系数可以相加：

$$1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots$$

$$-z-z^2-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{6}z^4-\cdots$$

$$z^2+z^3+\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{6}z^5+\cdots$$

$$-z^3-z^4-\frac{1}{2}z^5-\frac{1}{6}z^6-\cdots$$

$$\vdots$$

结果为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots\quad(|z|<1).\tag{5}$$

继续设$f(z)$和$g(z)$表示级数(1)的和，假设在$|z-z_0|<R$时$g(z)\neq 0$，由于商$f(z)/g(z)$在圆盘$|z-z_0|<R$内解析，它有泰勒级数表示

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-z_0)^n\quad(|z-z_0|<R),\tag{6}$$

其中系数d_n可以通过对$f(z)/g(z)$连续求导，估计其在$z=z_0$的导数．结果是第二步在级数(1)的首项运算而得到．由于实际上，运算一直仅需要开始少数项，则此方法不很困难．

例2 如同第34节所指的，整函数$\sinh z$的零点为数$z=n\pi i(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，所以商

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^2(z+z^3/3!+z^5/5!+\cdots)}$$

可以记为

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}\right),\tag{7}$$

在有孔圆盘$0<|z|<\pi$内有一个麦克劳林级数表示．等式(7)右边的圆括号内因子的分母为在$z\neq 0$时收敛于$\sinh z/z$而在$z=0$时收敛于1的幂级数．因而，该级数在圆盘$|z|<\pi$内任何地方均不为零，又以1除以上述级数，可以找到单项的幂级数表示，例如：

217

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-\frac{1}{3!}z^2+\left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots \\
\hline
1+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots & 1 \\
 & 1+\frac{1}{3!}z^2+\qquad\frac{1}{5!}z^4+\cdots \\
\cline{2-2}
 & -\frac{1}{3!}z^2-\qquad\frac{1}{5!}z^4+\cdots \\
 & -\frac{1}{3!}z^2-\qquad\frac{1}{(3!)^2}z^4-\cdots \\
\cline{2-2}
 & \left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots \\
 & \left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots \\
\cline{2-2}
 & \vdots
\end{array}
$$

即

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}=1-\frac{z^2}{3!}+\left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots,$$

或者

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}=1-\frac{z^2}{6}+\frac{7}{360}z^4+\cdots \quad (|z|<\pi). \tag{8}$$

因而

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6z}+\frac{7}{360}z+\cdots \quad (0<|z|<\pi). \tag{9}$$

虽然我们仅给出该洛朗级数的前三个非零项，但是其任意项可以继续运算除法找到.

练习

1. 利用级数的乘法证明：

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2+\cdots \quad (0<|z|<1).$$

218

2. 记 $\csc z=1/\sin z$，然后应用除法证明：

$$\csc z=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}z+\left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^3+\cdots \quad (0<|z|<\pi).$$

3. 应用除法求出下列洛朗级数表示

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z-\frac{1}{720}z^3+\cdots \quad (0<|z|<2\pi).$$

4. 应用下列第 61 节例题 2 中的展开式

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}+\frac{7}{360}z+\cdots \quad (0<|z|<\pi)$$

和练习 1 中的方法证明：

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sinh z} = \frac{-\pi i}{3},$$

C 为正向单位圆周 $|z|=1$.

5. 按下面级数直接除法运算的步骤求证第 61 节练习 2 的表达式(8)

(a)记

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots} = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + \cdots,$$

其中右边幂级数的系数通过运算下式两级数的乘法而确定

$$1 = (1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots)(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + \cdots).$$

展开这个乘积可以证明

$$(d_0 - 1) + d_1 z + \left(d_2 + \frac{1}{3!}d_0\right)z^2$$
$$+ \left(d_3 + \frac{1}{3!}d_1\right)z^3$$
$$+ \left(d_4 + \frac{1}{3!}d_2 + \frac{1}{5!}d_0\right)z^4 + \cdots = 0,$$

其中 $|z|<\pi$.

(b)令(a)中后面级数的系数等于 0，找出 d_0，d_1，d_2，d_3 和 d_4 的值. 由这些值，(a)中的第一个等式为第 61 节等式(8).

219

6. 应用数学归纳法证实第 61 节公式(3)两个微分函数和的 n 阶导数.

7. 设 $f(z)$ 为以下列级数形式表示的整函数

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad (|z|<\infty).$$

(a)对复合函数 $g(z)=f[f(z)]$ 连续求导，找到开始三个非零项，然后证明

$$f[f(z)] = z + 2a_2 z^2 + 2(a_2{}^2 + a_3)z^3 + \cdots \quad (|z|<\infty).$$

(b)将(a)中结果记为

$$f[f(z)] = f(z) + a_2[f(z)]^2 + a_3[f(z)]^3 + \cdots,$$

在右边用 $f(z)$ 的级数表示取代 $f(z)$，然后累加 z 幂项.

(c)对函数 $f(z)=\sin z$ 运用(a)中的结果证明

$$\sin(\sin z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \cdots \quad (|z|<\infty).$$

8. 欧拉数为下列麦克劳林级数表示中的数 $E_n(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$,

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \quad \left(|z|<\frac{\pi}{2}\right).$$

指出为什么在指定圆周中该表示合理，又

$$E_{2n+1} = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

接着证明：

220

$$E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61.$$

第 6 章　留数和极点

由第 44 节的柯西-古萨定理可知，如果一个函数在一个简单闭围道 C 及其内部解析，那么这个函数沿围道 C 的积分为零．这一章我们将要看到，如果函数在围道 C 的内部有限个点上不解析，那么这些点对积分值是有影响的．我们在这一章给出了留数定理；我们在第 7 章将阐述它在应用数学中的用法．

62　留数

回忆(第 23 节)如果函数 f 在 z_0 不解析，而在 z_0 的任意邻域内的某些点解析，则称 z_0 为 f 的奇点．如果 f 在 z_0 的去心邻域内解析，z_0 叫做 f 的孤立奇点．

例 1　函数

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

有三个孤立奇点 $z=0$，$z=\pm i$．

例 2　原点是对数函数的主值支

$$\mathrm{Log}z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi)$$

的奇点，但不是孤立奇点，因为它的每个去心 ε 邻域都包含负实轴(参看图 80)，而这一分支在负实轴无定义．

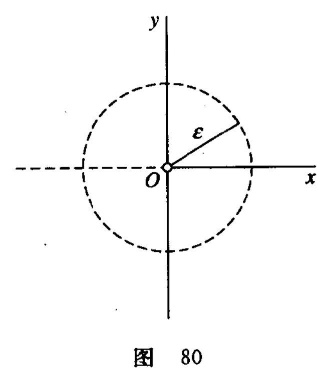


图　80

例 3　函数

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

有奇点 $z=0$，$z=1/n(n=\pm1, \pm2, \cdots)$，它们都在从 -1 到 1 的实轴上．除了 $z=0$ 之外的奇点都是孤立的．奇点 $z=0$ 不是孤立奇点，因为原点的每个去心 ε 邻域都包含函数的其他奇点．准确地说，给定正数 ε，任意正整数 m，$m>1/\varepsilon$，$0<1/m<\varepsilon$ 意味着 $z=1/m$ 在去心 ε 邻域 $0<|z|<\varepsilon$(图 81)．

当 z_0 是函数 f 的孤立奇点的时候，存在正数 R_2 使 f 在 $0<|z-z_0|<R_2$ 解析．因此，

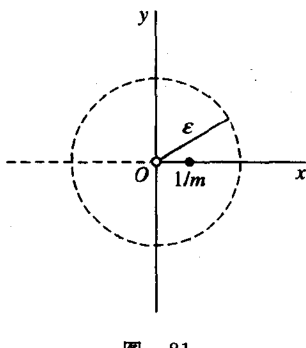


图　81

$f(z)$可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\cdots\quad(0<|z-z_0|<R_2),\tag{1}$$

这里系数 a_n 和 b_n 有积分表示(第55节). 特别地，

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{-n+1}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

这里 C 是任意正向的简单闭围道，z_0 在去心圆盘 $0<|z-z_0|<R_2$ 的内部(图82)，当 $n=1$ 时，b_n 可以表示为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi ib_1.\tag{2}$$

表达式(1)中 $1/(z-z_0)$ 的系数 b_1 是一个复数，叫做 f 在孤立奇点 z_0 的留数. 当明确指出函数 f 和 z_0 后，我们可以用

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z),$$

或 B 来表示留数 b_1.

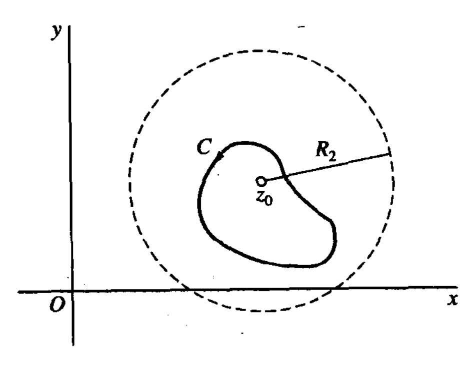


图　82

222
~
223

等式(2)提供了一个求某些沿简单闭围道的积分的有效方法.

例 4 计算积分

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4}, \tag{3}$$

这里 C 是沿正向的圆周 $|z-2|=1$(图 83). 由于被积函数在除了 $z=0$ 和 $z=2$ 外的平面上解析，所以它在去心圆盘 $0<|z-2|<2$ 内能展开为洛朗级数. 因此，根据等式(2)，积分(3)的值是 $2\pi i$ 乘以被积函数在 $z=2$ 的留数. 为了确定这个留数，我们回忆一下第 54 节的麦克劳林级数

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1)$$

由上我们可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-2)^4} &= \frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{2+(z-2)}\\ &= \frac{1}{2(z-2)^4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-2}{2}\right)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-4} \quad (0<|z-2|<2).\end{aligned}$$

这个洛朗级数也可以写成(1)的形式，$1/(z-2)$ 的系数就是要求的留数，即为 $-1/16$. 因此

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi i}{8}. \tag{4}$$

图 83

224

例 5 证明

$$\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)dz = 0, \tag{5}$$

这里 C 是单位圆周 $|z|=1$. 由于 $1/z^2$ 在除了原点外处处解析，因此被积函数也是如此. 孤立奇点 $z=0$ 在 C 的内部；由麦克劳林级数(第 54 节)

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \quad (|z|<\infty),$$

我们能得到洛朗展式

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6}+\cdots\quad(0<|z|<\infty).$$

因此，被积函数在它的孤立奇点 $z=0$ 处的留数为零($b_1=0$)，(5)式就被证明了.

63 柯西留数定理

如果函数 f 在简单闭围道 C 的内部除了有限个奇点外解析，这些奇点一定是孤立的(第 62 节). 下面的柯西留数定理是一个精确描述，即如果 C 是正向的，f 在 C 上也解析，则 f 沿 C 的积分值是 $2\pi i$ 乘以 f 在 C 的内部的奇点的留数的和.

定理 令 C 是一个简单闭围道的正向，如果 f 在 C 的内部除了有限个奇点 $z_k(k=1, 2, \cdots, n)$外解析，在 C 上也解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z). \tag{1}$$

为了证明这个定理，令 C_k 是 C 的内部以 $z_k(k=1, 2, \cdots, n)$为圆心的正向圆周，C_k 充分小使得任意两个没有公共点(图 84).

225

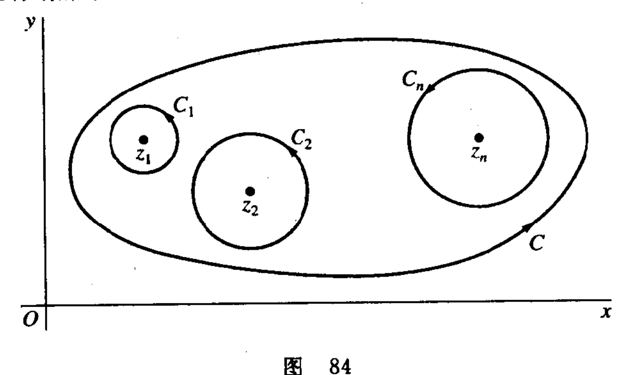


图 84

圆周 C_k 连同简单闭围道 C 组成一个闭区域的边界，它的内部是复连通的，f 在这个闭区域上解析. 因此，对这些区域应用柯西-古萨定理(第 46 节，定理 2)，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z-\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k}f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

又由于

$$\int_{C_k}f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

所以等式(1)成立，定理得证.

例 我们应用上面的定理求积分

$$\int_C\frac{5z-2}{z(z-1)}\mathrm{d}z$$

这里 C 是圆周沿逆时针方向的 $|z|=2$. 被积函数有两个孤立奇点 $z=0$ 和 $z=1$，它们都在 C 的内部. 我们可以通过麦克劳林级数

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \quad (|z| < 1).$$

求 $z=0$ 的留数 B_1 和 $z=2$ 的留数 B_2. 首先当 $0<|z|<1$(图 85)时,

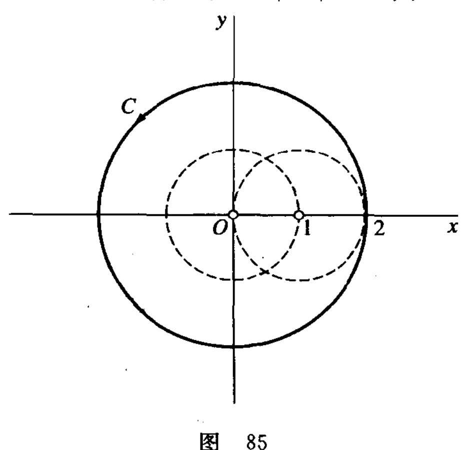


图 85

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} = \left(5 - \frac{2}{z}\right)(-1 - z - z^2 - \cdots);$$

右边两项乘起来得到 $1/z$ 的系数,因此 $B_1=2$. 由于当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5(z-1)+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)}$$

$$= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right)[1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots]$$

因此 $B_2=3$. 所以

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(B_1 + B_2) = 10\pi i.$$

在上面的例子中,把被积函数写成两个分数的和会使求解变得简单. 即

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1}.$$

由于当 $0<|z|<1$ 时 $2/z$ 已经是洛朗级数,当 $0<|z-1|<1$ 时 $3/(z-1)$ 也是洛朗级数,因此

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(2) + 2\pi i(3) = 10\pi i.$$

64 单个留数的应用

226 ~ 227

如果柯西留数定理(第 63 节)中的函数 f 在 C 的内部解析,有时候找出一个与 f 相关的其他函数的一个留数来计算 f 沿 C 的积分是很方便的. 我们把这个方法作为一个定理[⊖].

⊖ 这个结果源自于留数在无穷远点的留数注记,本书中我们将不会叙述. 关于留数在无穷远点的理论的更多细节,请参考 R. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis*, pp. 76—77, 1987.

定理 如果 C 是一个正向的简单闭围道，f 在整个复平面上除了 C 的内部的有限个点外解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{1}$$

为了推导表达式(1)我们首先做充分大的圆周 $|z|=R_1$ 使曲线 C 在它的内部(图 86).

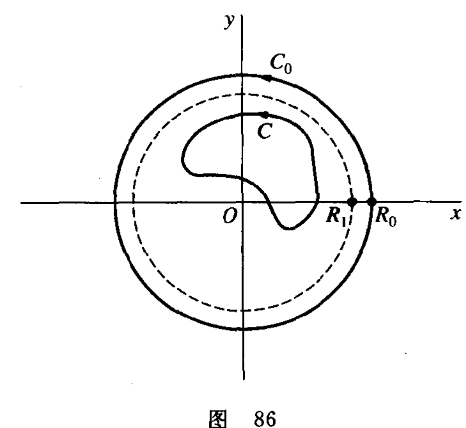


图 86

如果 C_0 代表正向的圆周 $|z|=R_0$ 这里 $R_0>R_1$，我们从洛朗定理(第 55 节)得到

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (R_1<|z|<\infty), \tag{2}$$

这里

228

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z^{n+1}} \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{3}$$

如果令表达式(3)中的 $n=-1$，我们发现

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}. \tag{4}$$

由于式(2)成立的条件不是 $0<|z|<R_2$，系数 c_{-1} 不是 f 在点 $z=0$ 的留数，$z=0$ 甚至可能不是 f 的奇点，但是如果在(2)中用 $1/z$ 来代替 z，我们发现

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{z^{n+2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_{n-2}}{z^n} \quad \left(0<|z|<\frac{1}{R_1}\right)$$

因此

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{5}$$

根据等式(4)和(5)，

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

最后，由于 f 在 C 和 C_0 围成的闭区域内解析，根据路径变形原则(第 46 节推论 2)结论(1)

成立.

例 在第 63 节中，我们通过找出 $f(z)$在 $z=0$ 和 $z=1$ 点的留数来计算

$$f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)}$$

沿圆周 $|z|=2$ 的逆时针方向的积分. 由于

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{5-2z}{z(1-z)}=\frac{5-2z}{z}\cdot\frac{1}{1-z}$$

$$=\left(\frac{5}{z}-2\right)(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=\frac{5}{z}+3+3z+\cdots\quad(0<|z|<1),$$

我们看到这里可以用上面的定理，这里留数为 5. 精确地说，

$$\int_C\frac{5z-2}{z(z-1)}\mathrm{d}z=2\pi i(5)=10\pi i,$$

229

这里 C 是题目中的圆周. 这个结果显然跟第 63 节中的结果相同.

练习

1. 找出下列函数在 $z=0$ 点的留数

(a)$\frac{1}{z+z^2}$；　(b)$z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$；　(c)$\frac{z-\sin z}{z}$；　(d)$\frac{\cot z}{z^4}$；　(e)$\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$.

答案：(a)1；　(b)−1/2；　(c)0；　(d)−1/45；　(e)7/6.

2. 利用柯西留数定理(第 63 节)计算下列函数沿圆周 $|z|=3$ 正向的积分

(a)$\frac{\exp(-z)}{z^2}$；　(b)$\frac{\exp(-z)}{(z-1)^2}$；　(c)$z^2\exp\left(\frac{1}{z}\right)$；　(d)$\frac{z+1}{z^2-2z}$.

答案：(a)$-2\pi i$；　(b)$-2\pi i/e$；　(c)$\pi i/3$；　(d)$2\pi i$.

3. 利用第 64 节的定理计算下列函数在沿圆周 $|z|=2$ 的正向的积分

(a)$\frac{z^5}{1-z^3}$；　(b)$\frac{1}{1+z^2}$；　(c)$\frac{1}{z}$.

答案：(a)$-2\pi i$；　(b)0；　(c)$2\pi i$.

4. 令 C 表示圆周 $|z|=1$ 的逆时针方向，用下面的步骤证明

$$\int_C\exp\left(z+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.$$

(a)利用 e^z 的麦克劳林级数和第 59 节定理 1，逐项地求积分，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_C z^n\exp\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z.$$

(b)利用第 63 节的定理求(a)中出现的积分以得出结论.

5. 设多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\quad(a_n\neq 0)$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m \quad (b_m \neq 0)$$

的次数满足 $m \geqslant n+2$. 利用第 64 节的定理证明若 $Q(z)$ 的零点都在简单闭围道 C 的内部，则

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

230 (与练习 3(b)做一下比较.)

65 孤立奇点的三种类型

我们在第 62 节看到留数定理是建立在 f 有孤立奇点 z_0 的基础上的，$f(z)$ 在去心邻域 $0 < |z - z_0| < R_2$ 能被表示成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots \tag{1}$$

其中包含 $z - z_0$ 的负次幂的部分

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots$$

叫做 f 在 z_0 的*主要部分*. 我们现在利用主要部分来定义孤立奇点 z_0 的三种类型. 这种分类将有利于我们以后几节的学习.

如果 f 在 z_0 的主要部分至少有一项不为零，且不为零的项有有限项，则存在正整数 m 使得

$$b_m \neq 0 \quad 和 \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0.$$

即，展式(1)具有形式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (0 < |z - z_0| < R_2), \tag{2}$$

这里 $b_m \neq 0$. 在这种情况下，孤立奇点 z_0 叫做 *m 级极点*[⊖]. $m=1$ 级极点经常称为*简单极点*.

例 1 函数

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = \frac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{z-2} \quad (0 < |z-2| < \infty)$$

231 在 $z_0 = 2$ 有一个简单极点($m=1$)，它在 $z_0 = 2$ 的留数为 $b_1 = 3$.

例 2 函数

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots$$
$$(0 < |z| < \infty)$$

在 z_0 有一个 $m=3$ 级极点，留数为 $b_1 = 1/6$.

还有两种情况，一种是主要部分的所有系数都为零，另一种是有无限项系数不为零.

当所有的 b_n 都为零时，有

⊖ 第 64 节的脚注中所提到的 R. P. Boas 的书中解释了术语极点的意义.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$
$$(0 < |z-z_0| < R_2), \tag{3}$$

点 z_0 称为可去奇点. 注意可去奇点的留数为零. 如果我们已经定义或者重新定义 f 在 z_0 的值使 $f(z_0)=a_0$，展式(3)在整个圆盘 $|z-z_0|<R_2$ 内成立. 由于一个级数在它的收敛域内代表一个解析函数(第 59 节)，因此，定义了 f 在 z_0 的值以后，f 在 z_0 解析. 所以奇点 z_0 是可去的.

例 3 点 $z_0=0$ 是函数

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots \quad (0<|z|<\infty).$$

的可去奇点，当定义 $f(0)=1/2$ 后，f 即为整函数.

当主要部分的系数 b_n 有无穷多项不为零的时候，z_0 叫做 f 的本性奇点. 一个关于函数在本性奇点附近的性质的重要结论是 Picard 给出的. 即如果 a 为 $f(z)$ 的本性奇点，则对于每一个 $A\neq\infty$，除掉一个可能值 $A=A_0$ 外，在 a 的任意邻域内必有无穷多个点 z，使 $f(z)=A$[⊖].

232

例 4 函数

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n} = 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

有一个本性奇点 $z_0=0$，这里留数 $b_1=1$. 作为 Picard 定理的一个例证，我们来说明 $\exp(1/z)$ 在原点的每个邻域内有无穷多个点取值为 -1. 我们首先回忆一下第 28 节的例子，当 $z=(2n+1)\pi i\ (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$时，$\exp(1/z)=-1$. 即当

$$z = \frac{1}{(2n+1)\pi i}\cdot\frac{i}{i} = -\frac{i}{(2n+1)\pi} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

时，$\exp(1/z)=-1$. 在原点的任意给定的邻域内显然有无穷多个这样的点. 由于对任意 z，$\exp(1/z)\neq0$. 零就是 Picard 定理中那个除去的值.

在这一章接下来的几节中，我们将要进一步学习上述定义的三种孤立奇点. 我们将着重用行之有效的办法来判断奇点的类型并且求出相应的留数.

练习

1. 写出下列函数在各自的孤立奇点的主要部分，并且判断奇点是极点、可去奇点，还是本性奇点：

(a) $z\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$； (b) $\dfrac{z^2}{1+z}$； (c) $\dfrac{\sin z}{z}$； (d) $\dfrac{\cos z}{z}$； (e) $\dfrac{1}{(2-z)^3}$.

2. 证明下列函数的奇点都是极点. 确定极点的级数 m 并求出相应的留数 B：

(a) $\dfrac{1-\cosh z}{z^3}$； (b) $\dfrac{1-\exp(2z)}{z^4}$； (c) $\dfrac{\exp(2z)}{(z-1)^2}$.

⊖ 关于 Picard 定理的证明，请参考附录 A 中引用的 Markushevich 的书第Ⅲ卷 51 节.

答案：(a)$m=1$，$B=-1/2$；　(b)$m=3$，$B=-4/3$；　(c)$m=2$，$B=2e^2$.

3. 假设 f 在点 z_0 解析，令 $g(z)=f(z)/(z-z_0)$. 证明

(a)如果 $f(z_0)\neq 0$，则 z_0 是 g 的简单极点，留数为 $f(z_0)$；

(b)如果 $f(z_0)=0$，则 z_0 是 g 的可去奇点.

提示：正如第53节所述，由于 $f(z)$在 z_0 解析，所以可以展开为泰勒级数. 把这个级数的

233 前几项写出来就能得到结论.

4. 把函数

$$f(z)=\frac{8a^3z^2}{(z^2+a^2)^3}\quad (a>0)$$

写成

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-ai)^3},\text{其中 }\phi(z)=\frac{8a^3z^2}{(z+ai)^3},$$

说明为什么 $\phi(z)$在 $z=ai$ 可以展开为泰勒级数，然后利用它证明 f 在 $z=ai$ 的主要部分为

$$\frac{\phi''(ai)/2}{z-ai}+\frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^2}+\frac{\phi(ai)}{(z-ai)^3}=-\frac{i/2}{z-ai}-\frac{a/2}{(z-ai)^2}-\frac{a^2i}{(z-ai)^3}.$$

66 极点的留数

若函数 f 有一个孤立奇点 z_0，鉴别 z_0 是极点并且找留数的最基本的方法是写出洛朗级数，看 $1/(z-z_0)$的系数. 下面的定理提供了描述极点和找出留数的另一种方法.

定理 孤立奇点 z_0 是 f 的 m 级极点当且仅当

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},\tag{1}$$

这里 $\phi(z)$解析且 $\phi(z_0)\neq 0$. 而且

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\phi(z_0),\quad \text{如果 } m=1,\tag{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!},\quad \text{如果 } m\geqslant 2.\tag{3}$$

234 注意由于 $\phi^{(0)}(z_0)=\phi(z_0)$，$0!=1$，当 $m=1$ 时，表达式(3)就退化为(2).

证明 设 $f(z)$具有形式(1)且 $\phi(z)$在 z_0 解析，因此在 z_0 的某个邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内 $\phi(z)$能展开为泰勒级数

$$\phi(z)=\phi(z_0)+\frac{\phi'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{\phi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

由表达式(1)知当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时

$$f(z)=\frac{\phi(z_0)}{(z-z_0)^m}+\frac{\phi'(z_0)/1!}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{\phi''(z_0)/2!}{(z-z_0)^{m-2}}+\cdots$$

$$+\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z-z_0}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m} \tag{4}$$

由上及 $\phi(z_0)\neq 0$ 知 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点. $1/(z-z_0)$ 的系数告诉我们，$f(z)$ 在 z_0 的留数正如定理所述.

另一方面，假设我们知道 z_0 是 f 的 m 级极点或者 $f(z)$ 在去心圆盘 $0<|z-z_0|<R_2$ 内具有洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots$$
$$+\frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}\quad (b_m\neq 0)$$

$$\phi(z)=\begin{cases}(z-z_0)^m f(z), z\neq z_0\\ b_m, z=z_0\end{cases}$$

在整个圆盘 $|z-z_0|<R_2$ 内显然可以表示为幂级数

$$\phi(z)=b_m+b_{m-1}(z-z_0)+\cdots+b_2(z-z_0)^{m-2}+b_1(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{m+n}$$

$\phi(z)$ 在圆盘 $|z-z_0|<R_2$ 内解析，特别是在 z_0 解析，由于 $\phi(z_0)=b_m\neq 0$，表达式(1)就被证明了. 定理证毕.

235

67 举例

下面的几个例子是为了例证前一节的定理.

例 1 函数 $f(z)=(z+1)/(z^2+9)$ 有一个孤立奇点 $z=3i$ 且可以写成

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{z-3i},\text{其中 }\phi(z)=\frac{z+1}{z+3i}$$

由于 $\phi(z)$ 在 $z=3i$ 解析，且 $\phi(3i)=(3-i)/6\neq 0$，$z=3i$ 是 f 的简单极点，这一点的留数为 $B_1=(3-i)/6$. 点 $z=-3i$ 也是 f 的简单极点，留数为 $B_2=(3+i)/6$.

例 2 如果 $f(z)=(z^3+2z)/(z-i)^3$ 则

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-i)^3},\text{其中 }\phi(z)=z^3+2z.$$

$\phi(z)$ 是整函数，$\phi(i)=i\neq 0$. 因此 f 有一个三级极点 $z=i$，这一点的留数为

$$B=\frac{\phi''(i)}{2!}=3i.$$

当然此定理也可以应用于涉及到多值函数的分支.

例 3 假设

$$f(z)=\frac{(\log z)^3}{z^2+1},$$

对数函数取

$$\log z=\ln r+i\theta\quad (r>0, 0<\theta<2\pi)$$

这一分支．为了找出 f 在 $z=i$ 的留数，我们令

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{z-i},\text{其中 }\phi(z)=\frac{(\log z)^3}{z+i}.$$

函数 $\phi(z)$ 在 $z=i$ 解析；又由于

$$\phi(i)=\frac{(\log i)^3}{2i}=\frac{(\ln 1+i\pi/2)^3}{2i}=-\frac{\pi^3}{16}\neq 0,$$

[236] 所求留数为 $B=\phi(i)=-\pi^3/16$.

虽然第 66 节的定理非常有用，但是直接运用洛朗级数判别一个孤立奇点为几级极点是最有效的方法．

例 4 例如函数

$$f(z)=\frac{\sinh z}{z^4}$$

在奇点 $z=0$ 就需要展开，因为如果令

$$f(z)=\phi(z)/z^4,\text{其中 }\phi(z)=\sinh z,$$

运用第 66 节的公式(3)得 $m=4$．但是用公式(3)必须有 $\phi(z_0)\neq 0$．在这种情况下，最简单的找出留数的办法是像第 65 节的例 2 一样把 $f(z)$ 的洛朗展式的前几项写出来．由此即得 $z=0$ 是三级极点，留数为 $B=1/6$.

有些情况下，可以有效地把级数方法和第 66 节的定理结合起来．

例 5 由于整函数 $z(e^z-1)$ 的零点为

$$z=2n\pi i\quad(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

显然 $z=0$ 是函数

$$f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}.$$

的孤立奇点．由麦克劳林级数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\quad(|z|<\infty),$$

我们得

$$z(e^z-1)=z\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=z^2\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)\quad(|z|<\infty).$$

因此

[237]

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{z^2},\quad\text{其中 }\phi(z)=\frac{1}{1+z/2!+z^2/3!+\cdots}.$$

由于 $\phi(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\phi(0)=1\neq 0$，点 $z=0$ 是二级极点；由第 66 节公式(3)，留数 $B=\phi'(0)$．因为在原点的某个邻域内

$$\phi'(z)=\frac{-(1/2!+2z/3!+\cdots)}{(1+z/2!+z^2/3!+\cdots)^2}$$

因此 $B=-1/2$.

还可以通过让 $z(e^z-1)$ 的级数表示除 1，或者用第 61 节 $1/(e^z-1)$ 的洛朗级数乘以 $1/z$ 的方法来求留数.

练习

1. 证明下列每个函数的奇点都是极点. 确定极点的级数 m，并求出留数 B:

(a)$\dfrac{z^2+2}{z-1}$; (b)$\left(\dfrac{z}{2z+1}\right)^3$; (c)$\dfrac{\exp z}{z^2+\pi^2}$.

答案：(a)$m=1$，$B=3$；(b)$m=3$，$B=-3/16$；(c)$m=1$，$B=\pm i/2\pi$.

2. 证明

(a)$\underset{z=-1}{\mathrm{Res}}\dfrac{z^{1/4}}{z+1}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ $(|z|>0,\ 0<\arg z<2\pi)$;

(b)$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\dfrac{\mathrm{Log}z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{\pi+2i}{8}$;

(c)$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\dfrac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1-i}{8\sqrt{2}}$ $(|z|>0,\ 0<\arg z<2\pi)$.

3. 求积分

$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z,$$

沿圆周(a)$|z-2|=2$；(b)$|z|=4$ 的逆时针方向的值.

答案：(a)πi；(b)$6\pi i$.

4. 求积分

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)},$$

沿圆周(a)$|z|=2$；(b)$|z+2|=3$ 的逆时针方向的值.

答案：(a)$\pi i/32$；(b)0.

5. 求积分

$$\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

238

的值，这里 C 是圆周 $|z|=2$ 的正向.

答案：$4\pi i$.

6. 利用第 64 节的只含一个留数的定理，计算 $f(z)$ 沿圆周 $|z|=3$ 的正向的积分，其中

(a)$f(z)=\dfrac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}$; (b)$f(z)=\dfrac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}$;

(c)$f(z)=\dfrac{z^3e^{1/z}}{1+z^3}$.

答案：(a)$9\pi i$；(b)$-3\pi i$；(c)$2\pi i$.

68 解析函数的零点

函数的零点和极点有密切的关系. 实际上，我们在下一节将看到零点是极点的根源. 然而，我们首先需要一些有关解析函数的零点的结论.

假设函数 f 在 z_0 解析. 我们从第48节知道 f 在 z_0 点的各阶导数 $f^{(n)}(z)(n=1,2,\cdots)$ 存在. 如果 $f(z_0)=0$ 并且存在正整数 m 使 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$，低于 m 的各阶导数在 z_0 点的值都为零，则 z_0 称为 f 的 m 阶零点. 我们这儿的第一个定理给出了 m 级零点的一个性质.

定理1 函数 f 在 z_0 解析且以 z_0 为 m 级零点的充要条件是存在函数 g 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$，使

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z). \tag{1}$$

定理的充分性和必要性的证明都用到第53节的事实：如果一个函数在 z_0 解析，则它在 z_0 的某个邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内能展开为泰勒级数.

假设表达式(1)成立，由于 $g(z)$ 在 z_0 解析，因此在 z_0 的某个邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内能展开为泰勒级数

$$g(z)=g(z_0)+\frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$

所以当 $|z-z_0|<\varepsilon$ 时，表达式(1)即为

$$f(z)=g(z_0)(z-z_0)^m+\frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{m+1}+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

由于这是 $f(z)$ 的泰勒级数展开式，根据第60节定理1，得

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0 \tag{2}$$

239

$$f^{(m)}(z_0)=m!g(z_0)\neq 0. \tag{3}$$

因此 z_0 是 f 的 m 级零点.

反过来，假设 f 具有 m 级零点 z_0，在 z_0 解析，由(2)，f 在 z_0 的某个邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内能展开为泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\right.$$
$$\left.+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2+\cdots\right].$$

即，$f(z)$ 具有形式(1)，这里

$$g(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2+\cdots\quad(|z-z_0|<\varepsilon).$$

最后一个级数在 $|z-z_0|<\varepsilon$ 的收敛性保证了 g 在此解析，特别是在 z_0 解析. 而且，

$$g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0.$$

定理证毕.

例 $z_0=0$ 是整函数 $f(z)=z(e^z-1)$ 的 $m=2$ 级零点，这是因为

$$f(0)=f'(0)=0 \quad 和 \quad f''(0)=2\neq 0.$$

这里边表达式(1)中的 g 是通过如下方式定义的

$$g(z)=\begin{cases}(e^z-1)/z, z\neq 0\\ 1, z=0\end{cases}$$

它在 $z=0$ 解析，实际上还是整函数(参考 60 节练习 4).

接下来的定理告诉我们解析函数的重点是孤立的.

定理 2 给定一个函数 f 和一点 z_0，假设

(i) f 在 z_0 解析；

(ii) $f(z_0)=0$ 但 $f(z)$ 在 z_0 的任意邻域内不恒等于 0，

则在 z_0 的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内，$f(z)\neq 0$.

240

证明 设 f 如上所述，则 f 在 z_0 的所有导数不可能全为零. 如果不然，f 在 z_0 的泰勒级数的系数就会全为零；这意味着 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内恒为零. 从本节开头的 m 级零点的定义知 z_0 是 f 的 m 级零点，根据定理 1，有

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z) \tag{4}$$

这里 $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.

由于 g 在 z_0 解析，所以连续，又由于 $g(z_0)\neq 0$，因此存在 z_0 的某个邻域 $|z-z_0|<\varepsilon$ 使得在这个邻域内等式(4)成立且 $g(z)\neq 0$(参看第 17 节)，即有在去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内 $f(z)\neq 0$. 证明就完成了.

最后一个定理是关于具有非孤立零点的函数的，它在前面的第 26 节就曾经提到过，读者可以和上面的定理 2 做一下比较.

定理 3 给定一个函数 f 和一点 z_0，假设

(i) f 在包含 z_0 的某个邻域 N_0 内解析；

(ii) $f(z_0)=0$ 且在包含 z_0 的每个区域或线段上有 $f(z)=0$(图 87)，

则 $f(z)$ 在 N_0 内恒等于 0，即在 N_0 内 $f(z)\equiv 0$.

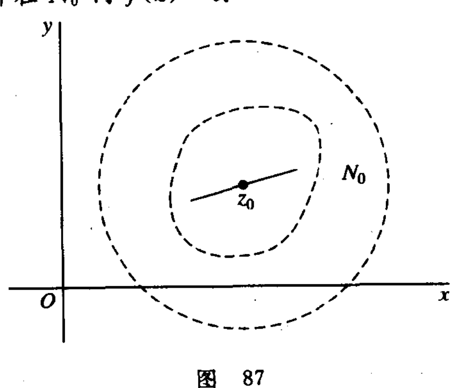


图 87

证明 在上述条件下，在 z_0 的某个邻域 N 内 $f(z)\equiv 0$. 否则，根据上面的定理 2，在 z_0

[241] 的某个去心邻域内 $f(z)\neq0$；这与在包含 z_0 的每个区域或线段上有 $f(z)=0$ 矛盾. 由于在 N 内 $f(z)\equiv0$，所以 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数的系数

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$$

全为零. 由于在 N_0 内的泰勒级数代表了 $f(z)$，所以在 N_0 内 $f(z)\equiv0$. 这就完成了定理的证明.

69 零点和极点

下面的定理说明了怎样由 m 级零点得到 m 级极点.

定理 1 假设

(i)两个函数 p 和 q 在点 z_0 解析；

(ii)$p(z_0)\neq0$，z_0 是 q 的 m 级零点.

则 z_0 是 $p(z)/q(z)$ 的 m 级极点.

证明 设 p 和 q 如定理中所述. 由于 z_0 是 q 的 m 级零点，我们从第 68 节定理 2 知道在 z_0 的某个去心邻域内 $q(z)\neq0$；因此 z_0 是商 $p(z)/q(z)$ 的孤立奇点. 由第 68 节的定理 1

$$q(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

这里 g 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq0$；由上式得

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z)/g(z)}{(z-z_0)^m}. \tag{1}$$

由于 $p(z)/q(z)$ 在 z_0 解析且 $p(z_0)/q(z_0)\neq0$，从第 66 节的定理知 z_0 是 $p(z)/q(z)$ 的 m 级极点.

例 1 两个函数

$$p(z)=1 \quad 和 \quad q(z)=z(e^z-1)$$

都是整函数；我们从第 68 节的例题中知道 $z_0=0$ 是 q 的 $m=2$ 级零点. 从定理 1 知这一点是商

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{1}{z(e^z-1)}$$

[242] 的二级极点. 这就从另一方面论证了第 67 节例 5.

定理 1 告诉了我们鉴别简单极点和找出相应留数的另一种方法，这种方法有时候要比第 66 节的方法简单.

定理 2 设两个函数 p 和 q 在 z_0 解析. 如果

$$p(z_0)\neq0,\quad q(z_0)=0 \quad 和 \quad q'(z_0)\neq0,$$

则 z_0 是商 $p(z)/q(z)$ 的简单极点且

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \tag{2}$$

证明 假设 p 和 q 如上所述，由所给条件知 z_0 是函数 q 的 1 级零点. 根据第 68 节定理 1，有

$$q(z)=(z-z_0)g(z) \tag{3}$$

这里 g 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq0$. 本节的定理 1 告诉我们 z_0 是 $p(z)/q(z)$ 的简单极点，它的证明

中的等式(1)变为

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{z-z_0}.$$

$p(z)/g(z)$在 z_0 解析且 $p(z_0)/g(z_0)\neq 0$；由第 66 节定理知

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}. \tag{4}$$

对等式(3)的两边求导，并令 $z=z_0$ 得 $g(z_0)=q'(z_0)$，表达式(4)即为(2).

例 2 考虑函数

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

这是两个整函数 $p(z)=\cos z$ 和 $q(z)=\sin z$ 的商，这个商的奇点是 q 的零点，即为点

$$z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

由于

$$p(n\pi) = (-1)^n \neq 0, \quad q(n\pi) = 0, \quad q'(n\pi) = (-1)^n \neq 0,$$

243

f 的每个奇点 $z=n\pi$ 都是简单极点，具有留数

$$B_n = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1.$$

例 3 函数

$$f(z) = \frac{\tanh z}{z^2} = \frac{\sinh z}{z^2 \cosh z}$$

在 $\cosh z$ 的零点 $z=\pi i/2$ 的留数可以通过如下方法很容易地求出来. 令

$$p(z) = \sinh z \quad 和 \quad q(z) = z^2 \cosh z.$$

由于

$$p\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i\sin\frac{\pi}{2} = i \neq 0,$$

$$q\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0, \quad q'\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \left(\frac{\pi i}{2}\right)^2 \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} i \neq 0,$$

我们发现 $z=\pi i/2$ 是 f 的简单极点，并且在这点的留数为

$$B = \frac{p(\pi i/2)}{q'(\pi i/2)} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

例 4 我们可以通过如下方法找到函数

$$f(z) = \frac{z}{z^4+4}$$

在孤立奇点

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = 1+i$$

的留数. 令 $p(z)=z$，$q(z)=z^4+4$. 由于

$$p(z_0) = z_0 \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) = 4z_0^3 \neq 0,$$

f 有一个简单极点 z_0，在这点的留数为

$$B_0=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}=\frac{z_0}{4z_0^3}=\frac{1}{4z_0^2}=\frac{1}{8i}=-\frac{i}{8}.$$

[244] 虽然此题也可以通过第66节的方法来求，但是计算可能会有点麻烦.

对于高阶极点也有类似于公式(2)的公式，但就是比较麻烦，一般情况下是不用的.

练习

1. 通过如下方法证明 $z=0$ 是函数

$$f(z)=\csc z=\frac{1}{\sin z}$$

的简单极点：

(a)第69节的定理2；

(b)第61节练习2的 $\csc z$ 的洛朗展式.

2. 证明

(a) $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=\pi i}\frac{z-\sinh z}{z^2\sinh z}=\frac{i}{\pi}$；

(b) $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=\pi i}\frac{\exp(zt)}{\sinh z}+\operatorname*{Res}_{z=-\pi i}\frac{\exp(zt)}{\sinh z}=-2\cos\pi t.$

3. 证明

(a) $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_n}(z\sec z)=(-1)^{n+1}z_n$，这里 $z_n=\frac{\pi}{2}+n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(b) $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_n}(\tanh z)=1$，这里 $z_n=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4. 设 C 是圆周 $|z|=2$ 的正向，计算下列积分的值：

(a) $\displaystyle\int_C\tan z\,dz$；　(b) $\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sinh 2z}$.

答案：(a) $-4\pi i$；　(b) $-\pi i$.

5. 设 C_N 是由下列直线所围的正方形边界

$$x=\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\quad 和\quad y=\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

这里 N 为正整数. 证明

$$\int_{C_N}\frac{dz}{z^2\sin z}=2\pi i\left[\frac{1}{6}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right].$$

然后由 $N\to\infty$ 时这个积分的值为零(第41节练习7)，证明

[245]
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

6. 证明

$$\int_C \frac{dz}{(z^2-1)^2+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

这里 C 是由直线 $x=\pm 2$，$y=0$，$y=1$ 所围的矩形的边界的正向.

提示：注意到多项式 $q(z)=(z^2-1)^2+3$ 的四个零点是 $1\pm\sqrt{3}i$ 的平方根，倒数 $1/q(z)$ 在 C 上及其所围的区域内除了

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}} \quad 和 \quad -\overline{z_0} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}.$$

外解析，然后运用第 69 节定理 2.

7. 考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2},$$

这里 q 在 z_0 解析且 $q(z_0)=0$，$q'(z_0)\neq 0$. 证明 z_0 是函数 f 的 $m=2$ 级极点，且 f 在这点的留数为

$$B_0 = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}.$$

提示：注意到 z_0 是函数 q 的 $m=1$ 级零点，因此

$$q(z) = (z-z_0)g(z),$$

这里 $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$. 令

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^2}, \quad \phi(z) = \frac{1}{[g(z)]^2}.$$

然后由

$$q'(z_0) = g(z_0) \quad 和 \quad q''(z_0) = 2g'(z_0)$$

得到所求的 $B_0=\phi'(z_0)$ 的形式.

8. 利用第 7 题的结论找出下列函数在 $z=0$ 点的值.

(a) $f(z)=\csc^2 z$；　(b) $f(z)=\dfrac{1}{(z+z^2)^2}$.

答案：(a) 0；　(b) -2.

9. 令 p 和 q 表示在 z_0 解析的函数，这里 $p(z_0)\neq 0$，$q(z_0)=0$. 证明如果 z_0 是商 $p(z)/q(z)$ 的 m 级极点，则 z_0 是 q 的 m 级零点（与第 69 节定理 1 作一下比较).

提示：由第 66 节的定理我们可以令

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},$$

这里 $\phi(z)$ 在 z_0 解析且 $\phi(z_0)\neq 0$. 解出 $q(z)$.

246

10. 第 10 节中提到如果在 z_0 的任意去心邻域内都有集合 S 中的点，则 z_0 称为 S 的聚点. Bolzano-Weierstrass 定理可以用如下形式描述：*有界闭域 R 中的无穷点列在 R 中至少有一个聚点*[⊖]. 运用这个定理和第 68 节的定理 2，证明如果 R 是由简单闭围道 C 及其内部组成，除了

⊖ 例如，参考 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed., pp. 517 和 521, 1983.

在 C 内可能的极点外，函数 f 在 R 上解析，如果 f 在边界上不为零，在 C 内的零点都是有限阶的，则这些零点一定是有限个.

11. 令 R 表示有简单闭围道 C 及其内部组成的区域. 利用 Bolzano-Weierstrass 定理(练习 10)和极点都是孤立奇点，证明如果除了 C 内的极点外，函数 f 在 R 上解析，则这些极点一定为有限个.

70 解析函数 f 在孤立奇点附近的性质

正如第 65 节所述，函数 f 在孤立奇点 z_0 的性质由 z_0 是极点、可去奇点还是本性奇点决定. 在这一节，我们将对这个问题进行更深的研究. 由于本书中其他地方都没有用到本节的结论，读者如果想对留数定理的运用有一个更快的了解，可以略过本节.

定理 1 *如果 z_0 是函数 f 的极点，则*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty. \tag{1}$$

证明 设 z_0 是 f 的 m 级极点，由第 66 节的定理得

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},$$

这里 $\phi(z)$ 在 z_0 解析且 $\phi(z_0)\neq 0$. 由于

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m}{\phi(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m}{\lim\limits_{z\to z_0}\phi(z)} = \frac{0}{\phi(z_0)} = 0,$$

因此根据第 16 节极限的性质知(1)成立.

[247] 下面的定理将着重说明函数 f 在可去奇点附近的性质与在极点附近有很大区别.

定理 2 *如果 z_0 是函数 f 的可去奇点，则 f 在 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内解析且有界.*

证明 当适当定义 $f(z_0)$ 后，f 在圆盘 $|z-z_0|<R_2$ 内解析；当 $\varepsilon<R_2$ 时，f 在闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant\varepsilon$ 上连续. 因此，根据第 17 节，f 在这个闭圆盘上有界；即 f 在去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内不但解析而且有界.

本节的最后一个定理是关于函数在本性奇点附近的性质的，它的证明要用到下面的与定理 2 相近的称为黎曼定理的引理.

引理 *设函数 f 在 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内解析且有界. 如果 f 在 z_0 不解析，则 z_0 是 f 的可去奇点.*

证明 设 f 在 z_0 不解析，则 z_0 一定是 f 的孤立奇点；因此 $f(z)$ 在 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内能展成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{2}$$

如果 C 表示圆周 $|z-z_0|=\rho$ 的正向，这里 $\rho<\varepsilon$(图 88)，我们从第 55 节知道展式(2)中的系数 b_n 可以写成

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{-n+1}} \quad (n=1,2,\cdots). \tag{3}$$

图 88

248

由函数 f 的有界性知，存在 M，使当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时，$|f(z)|\leqslant M$ 因此由表达式(3)

$$|b_n|\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{-n+1}}2\pi\rho = M\rho^n \quad (n=1,2,\cdots).$$

由于系数 b_n 是常数，ρ 可以任意小，所以，在洛朗级数(2)中的 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$，因此 z_0 是 f 的可去奇点，这就完成了引理的证明.

我们从第 65 节知道函数在本性奇点附近的性质是很不规则的，下面的定理跟前几节的 Picard 定理很相似，它经常被称为 Casorati-Weierstrass 定理. 即在本性奇点的任意去心邻域内，函数值可以任意接近任何给定的值.

定理 3 假设 z_0 是函数 f 的本性奇点，w_0 是任意复数. 则对任意正数 ε，z_0 的任意去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，都存在 z(图 89)，使

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon \tag{4}$$

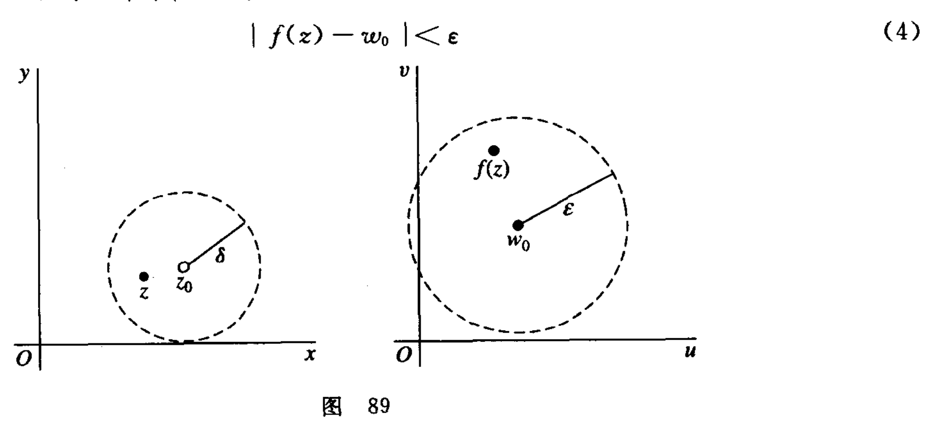


图 89

证明 使用反证法. 由于 z_0 是 f 的孤立奇点，因此 f 在某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 解析；我们假设(4)对 $0<|z-z_0|<\delta$ 的任意 z 不成立，即当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，$|f(z)-w_0|\geqslant\varepsilon$，因此函数

[249]

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w_0}\quad(0<|z-z_0|<\delta)\tag{5}$$

在它的定义域内有界并且解析. 由上面的引理知 z_0 是 g 的可去奇点；适当定义 $g(z_0)$使 g 在 z_0 解析.

如果 $g(z_0)\neq 0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，函数 $f(z)$可以写成

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}+w_0\tag{6}$$

如果我们令

$$f(z_0)=\frac{1}{g(z_0)}+w_0.$$

则 f 在 z_0 解析，即 z_0 是 f 的可去奇点，而不是本性奇点，因此我们得到矛盾.

如果 $g(z_0)=0$，由于 $g(z)$在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<\delta$ 不恒等于零，因此 z_0 是 g 的 m 级零点，根据等式(6)，z_0 是 f 的 m 级极点(参看第 69 节定理 1). 这又是一个矛盾；因此定理 3 成

[250] 立.

第7章　留数的应用

在上一章中，我们学习了留数理论，本章介绍某些理论的重要应用，这些应用包括在实分析和应用数学中用到的几种固定类型的定积分和广义积分的计算，值得注意的是一种建立在留数基础上的方法，它经常用来确定函数的零点，或者通过求留数和来寻找拉普拉斯逆映射。

71　广义积分的计算

在微积分中，连续函数 $f(x)$ 在半无限区间 $x\geqslant 0$ 上的广义积分是用如下等式来定义的：

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

当右式的极限存在时，就称广义积分收敛到此极限，如果 $f(x)$ 在所有的 x 都连续，则它在无穷区间 $-\infty<x<\infty$ 上的广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)\,\mathrm{d}x; \tag{2}$$

当右式的两个极限都存在时，积分(2)收敛到它们的和，对应于(2)式的另一个积分值非常有用，即积分表达式(2)的柯西主值(P. V.)

251

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

这时要求右式单个极限存在.

若积分(2)收敛，则它的柯西主值(3)存在，而且也就是积分(2)收敛到的值，这是因为

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

且当积分(2)收敛时，上式右边的每一个积分的极限($R\to\infty$)存在. 然而，当它的柯西主值存在时，积分(2)并不总是收敛，下面的例子就说明了这一点.

例　观察

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0. \tag{4}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x &= \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} x\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{R_1\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R_1}^{0} + \lim_{R_2\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{R_2}\\ &= -\lim_{R_1\to\infty}\frac{R_1^2}{2} + \lim_{R_2\to\infty}\frac{R_2^2}{2};\end{aligned} \tag{5}$$

又由于最后的两个极限不存在，可以知道广义积分(5)不存在.

但是若假设 $f(x)(-\infty<x<\infty)$ 为偶函数，即对任意的 x 均有 $f(-x)=f(x)$，由于 $y=$

$f(x)$的图形关于 y 轴对称，因而有下列等式

252

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R f(x)\mathrm{d}x,$$

由上述等式我们可以知道，当柯西主值(3)存在时，积分(1)收敛于该值的一半，此外，由于积分(1)收敛以及

$$\int_{-R_1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{R_1} f(x)\mathrm{d}x,$$

积分(2)收敛于积分(1)的两倍，现在我们可以得到如下结论：*如果 $f(x)(-\infty<x<\infty)$是偶函数，并且柯西主值(3)存在，则积分(1)和积分(2)都收敛，而且*

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

接下来我们介绍一种利用留数的方法，这种方法将在下一节给出证明，经常用它来计算偶有理函数 $f(x)=p(x)/q(x)$的广义积分，其中 $f(-x)=f(x)$，$p(x)$和 $q(x)$为互质的两个实系数多项式. 我们假设 $q(z)$不存在实根但至少有一个根的实部大于 0，该方法首先确定多项式 $q(z)$所有实部大于 0 的互异根，显然，这些根的数量是有限的(参见第 49 节)，不妨记它们为 z_1，z_2，…，z_n，其中 n 小于或等于 $q(z)$的次数，然后我们计算

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{7}$$

在半圆区域沿正方向边界的积分(图 90)，

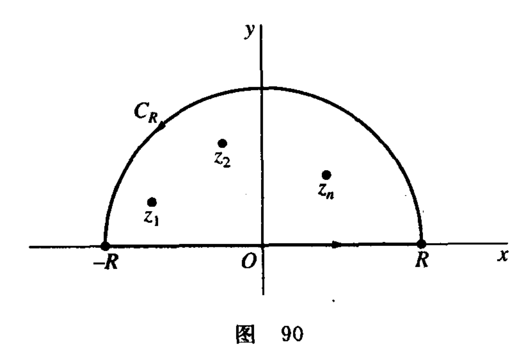


图 90

该闭围道是由从 $z=-R$ 到 $z=R$ 的实轴部分和逆时针方向的圆周 $|z|=R$ 的上半部分构成，用 C_R 表示该曲线，我们认为 R 是一个足够大的正实数，可以将点 z_1，z_2，…，z_n 都包含在上述的闭的路径中.

253

由 63 节中的柯西留数定理，将参数表达式 $z=x(-R\leqslant x\leqslant R)$代入可得

$$\int_{-R}^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

或者

$$\int_{-R}^R f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) - \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z. \tag{8}$$

如果

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

则有

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{9}$$

如果 $f(x)$是偶函数，由等式(6)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \tag{10}$$

和

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{11}$$

72 举例

我们现在用 71 节中的方法来计算广义积分.

例 为了计算积分

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x,$$

我们首先观察函数

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}$$

的孤立奇点为 $z^6+1=0$ 的根，也就是-1 的 6 个根，除此之外，在其余点都是解析的，通过我们在第 8 节对复数求根的方法，可以知道-1 的 6 个根分别为 [254]

$$c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)\right] \quad (k = 0,1,2,\cdots,5),$$

显然任何一个根都不在实轴上，前面的三个根

$$c_0 = e^{i\pi/6},\quad c_1 = i,\quad c_2 = e^{i5\pi/6},$$

位于上半平面(图 91)，

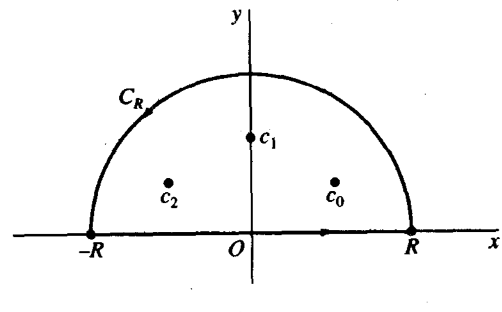


图 91

其他三个根位于下半平面，当 $R>1$ 时，点 $c_k(k=0,1,2)$包含在由边界 $z=x(-R\leqslant x\leqslant R)$的实轴部分和从 $z=R$ 到 $z=-R$ 的圆 $|z|=R$ 的上半部分 C_R 所构成的半圆区域内，计算 $f(z)$ 沿着这个半圆区域边界逆时针方向的积分，我们有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i(B_0+B_1+B_2), \tag{1}$$

其中 B_k 是 $f(z)$在 $c_k(k=0,1,2)$的留数.

利用 69 节的定理 2，我们知道点 c_k 是函数 f 的简单极点，因而有

$$B_k=\operatorname*{Res}_{z=c_k}\frac{z^2}{z^6+1}=\frac{c_k^2}{6c_k^5}=\frac{1}{6c_k^3}\quad(k=0,1,2).$$

因此

$$2\pi i(B_0+B_1+B_2)=2\pi i\left(\frac{1}{6i}-\frac{1}{6i}+\frac{1}{6i}\right)=\frac{\pi}{3};$$

等式(1)可以写成如下形式

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}-\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z, \tag{2}$$

255 等式对 $R>1$ 的任何值都成立.

下面，我们来证明当 R 趋于∞时，(2)式右边的积分值趋于 0，首先，当 $|z|=R$ 时，

$$|z^2|=|z|^2=R^2$$

且

$$|z^6+1|\geqslant \big||z|^6-1\big|=R^6-1.$$

因此，C_R 上的任何一点 z 都满足

$$|f(z)|=\frac{|z^2|}{|z^6+1|}\leqslant M_R,\quad 其中\ M_R=\frac{R^2}{R^6-1};$$

可以得到不等式

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant M_R\pi R, \tag{3}$$

πR 是半圆 C_R 的弧长(参见 41 节)，由于

$$M_R\pi R=\frac{\pi R^3}{R^6-1}$$

是一个以 R 为自变量的多项式的商，由于分子次数低于分母次数，当 R 趋于∞时，函数必趋于 0. 也即若将分子和分母同时除以 R^6，则有

$$M_R\pi R=\frac{\dfrac{\pi}{R^3}}{1-\dfrac{1}{R^6}},$$

显然可得 $M_R\pi R$ 趋于 0. 因此，通过不等式(3)有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

现在就可以通过等式(2)得到

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3},$$

或

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}.$$

256

由于被积函数为偶函数，由 71 节中的(6)式，我们可以得到如下结果

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{6}. \tag{4}$$

练习

利用留数计算练习 1 到 5 的广义积分.

1. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

答案：$\pi/2$.

2. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

答案：$\pi/4$.

3. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$.

答案：$\pi/(2\sqrt{2})$.

4. $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

答案：$\pi/6$.

5. $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

答案：$\pi/200$.

利用留数计算练习 6 和 7 的柯西主值.

6. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

7. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

答案：$-\pi/5$.

8. 利用留数和图 92 中的积分曲线(其中 $R>1$)，证明下列积分.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

257

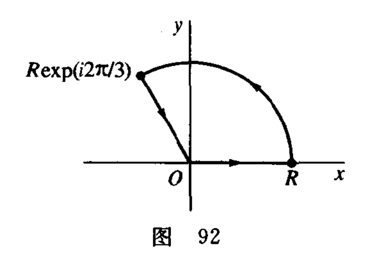


图 92

9. 设 m、n 均为整数，其中 $0\leqslant m\leqslant n$，通过以下步骤可以得到积分公式，

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2n}\csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right).$$

(a)首先我们求出多项式 $z^{2n}+1$ 实部大于 0 的根，这些根是

$$c_k=\exp\left[i\,\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

它在实轴上没有任何根.

(b)利用 69 节的定理 2，我们可以得到如下结论

$$\operatorname*{Res}_{z=c_k}\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}=-\frac{1}{2n}e^{i(2k+1)\alpha}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

其中 c_k 是在(a)中求得的根，

$$\alpha=\frac{2m+1}{2n}\pi.$$

然后利用求和公式

$$\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}\quad(z\neq 1)$$

利用第 10 节练习 7 可以得到

$$2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname*{Res}_{z=c_k}\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}=\frac{\pi}{n\sin\alpha}.$$

(c)利用(b)的最后计算结果就可以得到所要证明的结论.

10. 积分公式

258

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{[(x^2-a)^2+1]^2}=\frac{\pi}{8\sqrt{2A^3}}[(2a^2+3)\sqrt{A+a}+a\sqrt{A-a}],$$

其中 a 是任何的一个实数，$A=\sqrt{a^2+1}$，来自钢铁通过射频加热的淬水理论[㊀]，可以通过以下步骤得到结论.

(a)首先可以证明多项式

$$q(z)=(z^2-a)^2+1$$

㊀ 请参考附录 A 列出的 Brown，Hoyler and Bierwirth 的书 pp. 359-364.

中的四个根就是 $a\pm i$ 的平方根，同时我们有

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a})$$

且 $-z_0$ 是 $a+i$ 的平方根(参见第 9 章练习 5)，然后证明 $\pm\bar{z}_0$ 就是 $a-i$ 的平方根，因此就可以知道在半平面 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 中，只有 z_0 和 $-\bar{z}_0$ 是多项式 $q(z)$的零点.

(b)利用 69 节中练习 7 所得到的结论，为了将问题简化，我们假设 $z_0^2=a+i$，试证明(a)中的点 z_0 是函数 $f(z)=1/[q(z)]^2$ 的 2 阶极点，在 z_0 点的留数 B_1 可以写为

$$B_1=-\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}=\frac{a-i(2a^2+3)}{16A^2z_0}.$$

利用 $q'(-\bar{z})=-\overline{q'(z)}$和 $q''(-\bar{z})=\overline{q''(z)}$，用类似的方法证明(a)中 $-\bar{z}_0$也是函数 $f(z)$的 2 阶极点，留数为

$$B_2=\overline{\left\{\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}\right\}}=-\overline{B_1}.$$

然后可以得到这些留数的和为

$$B_1+B_2=\frac{1}{8A^2i}\mathrm{Im}\left[\frac{-a+i(2a^2+3)}{z_0}\right].$$

(c)参考(a)证明若 $|z|=R$ 有 $|q(z)|\geqslant(R-|z_0|)^4$，其中 $R>|z_0|$，再利用(b)的最后结果完成积分公式的推导.

73 傅里叶分析中的广义积分

留数定理可以用来计算形如

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin ax\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos ax\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

259

收敛的广义积分，其中 a 代表一个正常数，和 71 节一样，我们假设 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，其中 $p(x)$和 $q(x)$是两个互质的实系数多项式，另外，$q(z)=0$ 没有实根，积分(1)在傅里叶积分的理论和应用中经常用到[⊖]，71 节和 72 节中的方法不能直接用到这里，因为

$$|\sin az|^2=\sin^2 ax+\sinh^2 ay$$

和

$$|\cos az|^2=\cos^2 ax+\sinh^2 ay.$$

确切地说，由于

$$\sinh ay=\frac{e^{ay}-e^{-ay}}{2},$$

当 y 趋近无穷，模 $|\sin az|$ 和 $|\cos az|$ 像 e^{ay}一样增长，下面的例子由于

⊖ 参考作者 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed., Chap. 7, 2001.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\cos ax\,\mathrm{d}x + i\int_{-R}^{R} f(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,\mathrm{d}x,$$

和

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay}$$

而在上半平面 $y\geqslant 0$ 有界.

例 我们下面来证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{e^3}. \tag{2}$$

由于被积函数是偶函数，很容易证明积分的柯西主值存在并且能够将它计算出来，我们下面引进函数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} \tag{3}$$

显然函数 $f(z)e^{i3z}$ 在实轴上方(包括实轴)除了点 $z=i$ 之外的任何点都解析，奇点 $z=i$ 位于由 260 实轴上的 $-R\leqslant x\leqslant R$ 的部分和从 $z=R$ 到 $z=-R$ 的圆周 $|z|=R(R>1)$ 的上半部分 C_R 所围成的区域内，将函数 $f(z)e^{i3z}$ 沿着区域边界积分，有

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i3x}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z)e^{i3z}\mathrm{d}z, \tag{4}$$

其中

$$B_1 = \operatorname*{Res}_{z=i}[f(z)e^{i3z}].$$

由于

$$f(z)e^{i3z} = \frac{\phi(z)}{(z-i)^2},\quad \text{其中 } \phi(z) = \frac{e^{i3z}}{(z+i)^2},$$

点 $z=i$ 显然是函数 $f(z)e^{i3z}$ 的 $m=2$ 级极点，并且

$$B_1 = \phi'(i) = \frac{1}{ie^3}.$$

根据等式(4)两边的实部相等，就有下列等式

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{e^3} - \mathrm{Re}\int_{C_R} f(z)e^{i3z}\mathrm{d}z. \tag{5}$$

最后，如果点 z 是圆周 C_R 上的点，则有

$$|f(z)|\leqslant M_R,\text{其中 } M_R = \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

对于满足上述条件的点 z 有，$|e^{i3z}| = e^{-3y}\leqslant 1$，因此

$$\left|\mathrm{Re}\int_{C_R} f(z)e^{i3z}\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{C_R} f(z)e^{i3z}\mathrm{d}z\right| \leqslant M_R\pi R. \tag{6}$$

$$M_R\pi R = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}\cdot\frac{\frac{1}{R^4}}{\frac{1}{R^4}} = \frac{\frac{\pi}{R^3}}{\left(1-\frac{1}{R^2}\right)^2}$$

当 R 趋于∞时，上式趋于 0，结合不等式(6)，在等式(5)中只需要令 R 趋于∞，就能得到我们所要证明的结果(2). 261

74 若尔当引理

在计算 73 节中所介绍的积分时，有时候需要用到若尔当引理㊀，我们作为一个定理给出.

定理 假设

(i)函数 $f(z)$在除了圆周 $|z|=R_0$ 所包含的区域之外，在上半平面 $y\geqslant 0$ 的任何点都解析；

(ii)用 C_R 表示半圆 $z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，其中 $R>R_0$(如图 93 所示)；

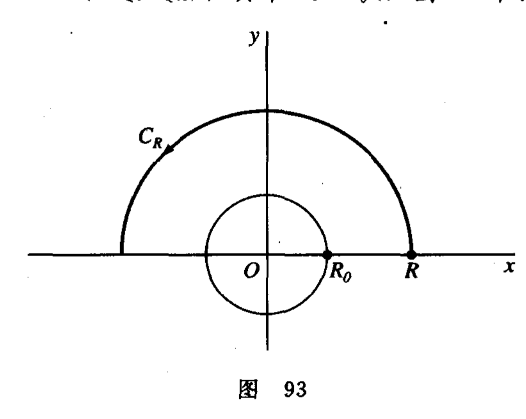


图 93

(iii)存在一个正常数 M_R，对于所有在 C_R 上的点 z，都满足不等式 $f(z)\leqslant M_R$，并且

$$\lim_{R\to\infty} M_R = 0.$$

则对于任何正常数 a 都满足等式

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

该定理的证明建立在若尔当不等式

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{R} \quad (R>0). \tag{2}$$

的基础上，为证明这个不等式，首先注意到，当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时，由函数 $y=\sin\theta$ 和 $y=\frac{2\theta}{\pi}$的图形(图 94)可知，对于该区间上所有的 θ 有 $\sin\theta\geqslant 2\theta/\pi$. 因此，如果 $R>0$，则有 262

$$e^{-R\sin\theta}\leqslant e^{\frac{-2R\theta}{\pi}}, \text{其中 } 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

这样，就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2R\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

㊀ 参考 38 节的第一个脚注.

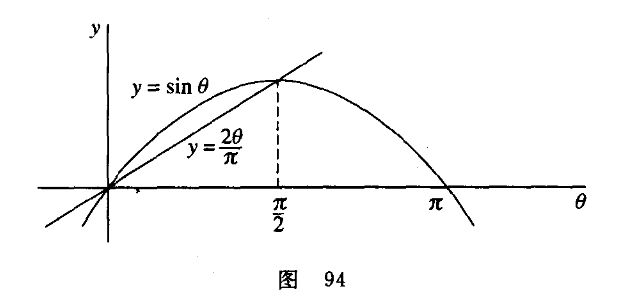


图 94

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{2R} \quad (R>0). \tag{3}$$

但是，由于 $y=\sin\theta$ 的图形在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上关于直线 $\theta=\pi/2$ 对称，因此这只是不等式(2)的另一种形式.

现在，我们转向证明极限(1)，假设条件(i)～(iii)满足，并用参数表达积分式

$$\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\exp(iaRe^{i\theta})iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

由于

$$|f(Re^{i\theta})|\leqslant M_R \quad \text{和} \quad |\exp(iaRe^{i\theta})|\leqslant e^{-aR\sin\theta}$$

同时根据若尔当不等式(2)，可以得到如下结果

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z\right| \leqslant M_R R\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\mathrm{d}\theta < \frac{M_R\pi}{a}.$$

当 $R\to\infty$时 $M_R\to 0$，(1)的极限就得到证明.

例 我们来计算下列积分的柯西主值

263

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}.$$

一般来说，它的存在性可以通过实际计算确定.

我们记

$$f(z)=\frac{z}{z^2+2z+2}=\frac{z}{(z-z_1)(z-\overline{z_1})},$$

其中 $z_1=-1+i$，点 z_1 位于 x 轴上方，它是函数 $f(z)e^{iz}$ 的一个简单极点，又有留数

$$B_1=\frac{z_1e^{iz_1}}{z_1-\overline{z_1}}. \tag{4}$$

因此，当 $R>\sqrt{2}$和 C_R 是 $|z|=R$ 的上半部分的正向弧时，有

$$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=2\pi iB_1-\int_{C_R} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z.$$

显然，两边的实部相等，即

$$\int_{-R}^{R}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\mathrm{Im}(2\pi iB_1)-\mathrm{Im}\int_{C_R} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z. \tag{5}$$

又

$$\left|\operatorname{Im}\int_{C_R} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{C_R} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z\right|; \tag{6}$$

同时，我们注意到当 z 是 C_R 上的点时，有

$$|f(z)| \leqslant M_R, \quad 其中\ M_R = \frac{R}{(R-\sqrt{2})^2}$$

和 $|e^{iz}| = e^{-y} \leqslant 1$，如果利用我们在 72 节和 73 节中的方法，则不能得到不等式(6)右边的表达式，而不等式的左边当 R 趋于∞时，它趋于 0. 由于

$$M_R\pi R = \frac{\pi R^2}{(R-\sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{R}\right)^2}$$

当 R 趋于∞时不趋于 0. (1)式中的极限给出了满意的结果.

因此，确实可以推出(6)式左边在 R 趋于∞时为 0，所以，由(4)式和(5)式可以得到结果 264

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \operatorname{Im}(2\pi i B_1) = \frac{\pi}{e}(\sin 1 + \cos 1). \tag{7}$$

练习

利用留数计算练习 1 到 8 的广义积分.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a > b > 0)$.

答案：$\dfrac{\pi}{a^2-b^2}\left(\dfrac{e^{-b}}{b}-\dfrac{e^{-a}}{a}\right)$.

2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

答案：$\dfrac{\pi}{2}e^{-a}$.

3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x \quad (a > 0, b > 0)$.

答案：$\dfrac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}$.

4. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+3}\mathrm{d}x$.

答案：$\dfrac{\pi}{2}\exp(-2\sqrt{3})$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^4+4}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

答案：$\dfrac{\pi}{2}e^{-a}\sin a$.

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin ax}{x^4+4}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

答案：$\pi e^{-a}\cos a$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

265

8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin x\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

利用留数来计算练习 9 到 11 广义积分的柯西主值.

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$.

答案：$-\dfrac{\pi}{e}\sin 2$.

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$.

答案：$\dfrac{\pi}{e}(\sin 2-\cos 2)$.

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x+a)^2+b^2}\mathrm{d}x\quad(b>0)$.

12. 按照下列步骤计算 Fresnel 积分，在微分理论中该积分是一个很重要的定理

$$\int_0^{\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

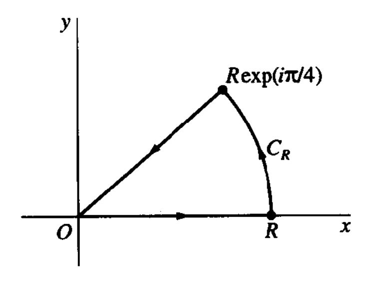
(a)通过沿着区间 $0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$ 的正向，如图 95，积分函数 $\exp(iz^2)$，并利用柯西-古萨定理证明

$$\int_0^R\cos(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}\mathrm{d}r-\mathrm{Re}\int_{C_R}e^{iz^2}\mathrm{d}z$$

和

$$\int_0^R\sin(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}\mathrm{d}r-\mathrm{Im}\int_{C_R}e^{iz^2}\mathrm{d}z,$$

其中 C_R 是弧 $z=Re^{i\theta}\,(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4})$.



266

图 95

(b)首先证明下面的不等式,

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\phi}\mathrm{d}\phi$$

然后利用这个不等式并参考 74 节(3)式来证明(a)中沿着 C_R 的积分值当 R 趋近无穷时，趋近零.

(c)利用(a)和(b)的结果和已经知道的积分公式[⊖]

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

完成其证明.

75 不规则路径

在这一节和下一节，我们主要讲解如何利用不规则路径，我们首先给出一个在本节所要用到的重要极限.

定理 假设

(i)函数 $f(z)$ 在实轴上有一个简单极点 $z=x_0$，在去心圆 $0<|z-x_0|<R_2$，如图(96)，有洛朗级数展开，且留数为 B_0；

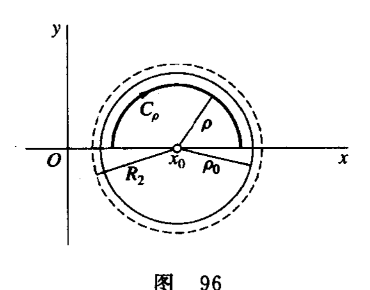


图 96

(ii)C_ρ 表示圆 $|z-x_0|=\rho$ 的上半部分，其中 $\rho<R_2$，并且是沿着顺时针方向，则有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = -B_0\pi i. \tag{1}$$

假定条件(i)和(ii)满足，现在我们来证明定理，由(i)我们可以将 $f(z)$ 表示成

$$f(z) = g(z) + \frac{B_0}{z-x_0} \quad (0<|z-x_0|<R_2),$$

[267]

其中

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n \quad (|z-x_0|<R_2).$$

也就是

$$\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_\rho} g(z)\mathrm{d}z + B_0\int_{C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_0}. \tag{2}$$

⊖ 参考 46 节练习 4 的脚注.

函数 $g(z)$在 $|z-x_0|<R_2$ 上是连续的，根据 58 节中的定理可以得到，如果我们选择一个数 ρ_0 满足条件 $\rho<\rho_0<R_2$(参见图 96)，按照 17 节的有关知识，我们有 $g(z)$在闭圆 $|z-x_0|\leqslant\rho_0$ 上一定是有界的，也即，存在一个非负常数 M，使得对于任意 $|z-x_0|\leqslant\rho_0$，

$$|g(z)|\leqslant M.$$

同时，由于路径 C_ρ的长度 L 为 $L=\pi\rho$，可以得到如下结论

$$\left|\int_{C_\rho} g(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant ML = M\pi\rho.$$

因此

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} g(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

同理，在半圆$-C_\rho$上的点都可以用参数

$$z = x_0 + \rho e^{i\theta} \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

表示，在(2)式中的右边的积分表达式的值为

$$\int_{C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_0} = -\int_{-C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_0} = -\int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}}\rho i e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = -i\int_0^\pi \mathrm{d}\theta = -i\pi.$$

因此

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-x_0} = -i\pi. \tag{4}$$

268 利用(3)式和(4)式，让等式(2)两边的 ρ 趋近于零立即就可以得到(1)式.

例 修改在 73 节和 74 节中所使用的方法，来推导积分公式[⊖]

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

计算 e^{iz}/z 在图 97 中表示的简单封闭围道上的积分，在图中 ρ 和 R 表示正实数，其中 $\rho<R$；L_1 和 L_2 分别表示实轴上的区间 $\rho\leqslant x\leqslant R$ 和 $-R\leqslant x\leqslant -\rho$，半圆 C_R 可以参照 73 节和 74 节的定义，引入半圆 C_ρ是为了避免计算积分时通过 e^{iz}/z 的奇点 $z=0$，利用柯西-古萨定理，可以得到

$$\int_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{L_2}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

或者

$$\int_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{L_2}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z. \tag{6}$$

此外，由于 L_1 和 $-L_2$ 的参数表达式分别为

⊖ 这个公式来自傅里叶积分理论，请参看作者的书 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed., pp. 206-208, 2001，是用完全不同的方法推导的.

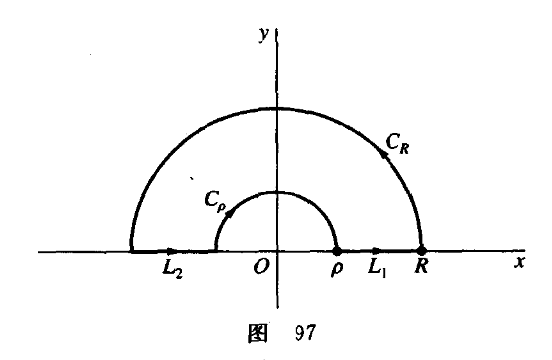


图 97

$$z = re^{i0} = r \quad (\rho \leqslant r \leqslant R) \quad 和 \quad z = re^{i\pi} = -r \quad (\rho \leqslant r \leqslant R), \tag{7}$$

在(6)式中的等式左边可以表示为

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \int_{-L_2} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_\rho^R \frac{e^{ir}}{r}\mathrm{d}r - \int_\rho^R \frac{e^{-ir}}{r}\mathrm{d}r = 2i\int_\rho^R \frac{\sin r}{r}\mathrm{d}r.$$

269

因此

$$2i\int_\rho^R \frac{\sin r}{r}\mathrm{d}r = -\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z. \tag{8}$$

现在，由洛朗级数展开式有

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}}{z} &= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{(iz)}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!}z + \frac{i^3}{3!}z^2 + \cdots \quad (0 < |z| < \infty).\end{aligned}$$

很明显，$\frac{e^{iz}}{z}$在原点有一个简单极点，留数为 1，因此，根据本节开始给出的定理有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -\pi i.$$

另外，由于

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R}.$$

当 z 是 C_R 上的点时，根据 74 节中的若尔当引理有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0.$$

因此，在(8)中分别令 ρ 趋于 0 和 R 趋于∞，可以得到结果

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin r}{r}\mathrm{d}r = \pi i,$$

也即得到(5)式.

76 绕支点的不规则路径

在本节中所用到的不规则路径和前面一节所用到的曲线路径相同，不同的是前一节涉及的

是孤立奇点，而本节涉及的是支点.

例 积分公式

[270]

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{32}(\ln 2 - 1) \tag{1}$$

可以利用多值函数$(\log z)/(z^2+4)^2$的分支

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2+4)^2} \quad \left(|z|>0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

而得到，该分支切割原点和负虚轴部分，显然该分支在除了$z=2i$的任何点都是解析的，为了使孤立奇点$2i$总是被包含在封闭的路径内部，我们规定$\rho<2<R$，如图98，在图中将孤立奇点和$z=0$已经标出，符号L_1，$-L_2$，C_ρ和C_R所表示的意义和图97相同.

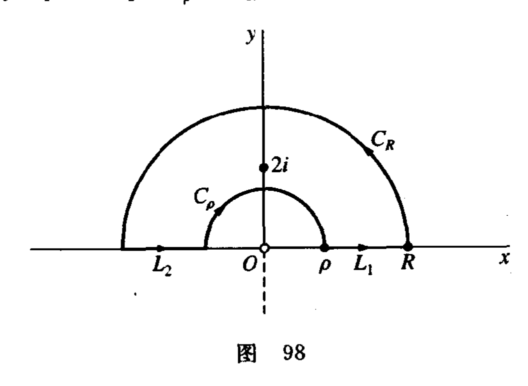


图 98

利用柯西留数定理有

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z).$$

因而有

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) - \int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z. \tag{2}$$

由于

$$f(z) = \frac{\ln r + i\theta}{(r^2 e^{i2\theta}+4)^2} \quad (z = re^{i\theta}),$$

L_1和L_2的参数表达式分别为

$$z = re^{i0} = r \quad (\rho \leqslant r \leqslant R) \quad 和 \quad z = re^{i\pi} = -r \quad (\rho \leqslant r \leqslant R) \tag{3}$$

因而(2)式可以表达为

[271]

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{-L_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_\rho^R \frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\mathrm{d}r + \int_\rho^R \frac{\ln r + i\pi}{(r^2+4)^2}\mathrm{d}r.$$

另外，由于

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-2i)^2}, 其中 \phi(z) = \frac{\log z}{(z+2i)^2},$$

$z=2i$ 为函数 $f(z)$的一个 2 级极点，留数为

$$\phi'(2i)=\frac{\pi}{64}+i\,\frac{1-\ln 2}{32}.$$

(2)式可以表达为

$$\begin{aligned}&2\int_{\rho}^{R}\frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\mathrm{d}r+i\pi\int_{\rho}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{(r^2+4)^2}\\&=\frac{\pi}{16}(\ln 2-1)+i\,\frac{\pi^2}{32}-\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z-\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z;\end{aligned}\tag{4}$$

利用等式两边实部相等，可以得到等式

$$2\int_{\rho}^{R}\frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{16}(\ln 2-1)-\mathrm{Re}\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z-\mathrm{Re}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z.\tag{5}$$

到现在如果能证明

$$\lim_{\rho\to 0}\mathrm{Re}\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z=0\quad 和\quad \lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0.\tag{6}$$

那么，分别将 ρ 趋于 0 和 R 趋于∞，则由(5)式有

$$2\int_{0}^{\infty}\frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{16}(\ln 2-1),$$

这就得到(1)式.

(6)式中的极限可以通过以下方法来证明，首先，我们注意到如果 $\rho<1$，$z=\rho e^{i\theta}$ 是曲线 C_ρ 上的点，则有

$$|\log z|=|\ln\rho+i\theta|\leqslant|\ln\rho|+|i\theta|\leqslant-\ln\rho+\pi$$

和

$$|z^2+4|\geqslant\big||z|^2-4\big|=4-\rho^2.$$

因此，可以得到如下结论

$$\left|\mathrm{Re}\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\left|\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{-\ln\rho+\pi}{(4-\rho^2)^2}\pi\rho=\pi\,\frac{\pi\rho-\rho\ln\rho}{(4-\rho^2)^2};$$

[272]

根据洛比达法则，当 ρ 趋于 0 时，$\rho\ln\rho$ 也趋于 0，因而上式中最右边的表达式趋于 0，这样(6)式中的第一极限就显然成立，类似地，通过不等式

$$\left|\mathrm{Re}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\ln R+\pi}{(R^2-4)^2}\pi R=\pi\,\frac{\dfrac{\pi}{R}+\dfrac{\ln R}{R}}{\left(R-\dfrac{4}{R}\right)^2}$$

根据洛比达法则，当 R 趋于∞时，$(\ln R)/R$ 也趋于 0，因而上式中最右边的表达式趋于 0，这样(6)式中的第二个极限也成立.

我们还可以得到另一个积分公式

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}=\frac{\pi}{32},\tag{7}$$

在(4)式中利用等式两边的虚部相等，即

$$\pi\int_{\rho}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{(r^2+4)^2}=\frac{\pi^2}{32}-\mathrm{Im}\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z-\mathrm{Im}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z. \tag{8}$$

由于

$$\left|\mathrm{Im}\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\left|\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z\right| \quad 和 \quad \left|\mathrm{Im}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|.$$

只需要分别令 ρ 趋于 0 和 R 趋于∞，就可以得到(7)式的结论.

77 沿支割线的积分

当被积函数 $f(z)$的部分积分路径沿着 $f(z)$的支割线时，可以利用柯西留数定理计算实积分.

例 令 x^{-a}表示 x 的指示幂的主值，其中 $x>0$，$0<a<1$，即 x^{-a}是正实数 $\exp(-a\ln x)$，在这里我们来计算下面的广义实积分

$$\int_0^\infty\frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x \quad (0<a<1). \tag{1}$$

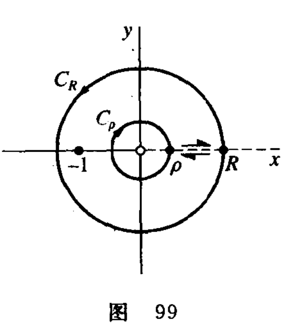


图 99

这个积分在 γ 函数的学习中是十分重要的[⊖]，注意到积分(1)是广义的不仅是因为它的积分上极限而且因为 $x=0$ 是被积函数的不连续点. 由于被积函数在 $x=0$ 附近具有 x^{-a}一样的性质，而当 x 趋近∞时具有 x^{-a-1}一样的性质，因此被积函数在 $0<a<1$ 收敛，然而，由于收敛性包含在计算中，不需要单独证明其收敛，令 C_ρ和 C_R 分别表示圆 $|z|=\rho$ 和 $|z|=R$，其中 $\rho<1<R$；其方向如图 99 所示，接着沿着如图 99 所示的简单闭围道积分多值函数 $z^{-a}/(z+1)$的分支

$$f(z)=\frac{z^{-a}}{z+1} \quad (|z|>0,0<\arg z<2\pi) \tag{2}$$

沿着 $\arg z=0$ 切割，这个闭围道从 $f(z)$支割线的上方 ρ 到 R，接着沿 C_R 回到 R，再沿切割的下方到 ρ，最后沿 C_ρ回到 ρ.

$\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 分别沿着切割的上下边缘，因此

$$f(z)=\frac{\exp(-a\log z)}{z+1}=\frac{\exp[-a(\ln r+i\theta)]}{re^{i\theta}+1}$$

其中 $z=re^{i\theta}$，在上边缘有

$$f(z)=\frac{\exp[-a(\ln r+i0)]}{r+1}=\frac{r^{-a}}{r+1}$$

其中 $z=re^{i0}$，在下边缘有

$$f(z)=\frac{\exp[-a(\ln r+i2\pi)]}{r+1}=\frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1}$$

⊖ 请看附录 A 中引用 Lebedev 的书，p. 4.

其中 $z=re^{i2\pi}$，留数定理表明

273~274

$$\int_{\rho}^{R}\frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z-\int_{\rho}^{R}\frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1}\mathrm{d}r+\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1}f(z).\tag{3}$$

由于 $f(z)$ 在支割线部分是不解析或者说是没有定义的，因此对(3)式的推导只能是形式上的，然而，它能如练习 8 一样通过一个幅角的修改而合理化.

等式(3)的留数可以通过函数

$$\phi(z)=z^{-a}=\exp(-a\log z)=\exp[-a(\ln r+i\theta)]\quad(r>0,0<\theta<2\pi)$$

而得到，这个函数在 $z=-1$ 是解析的，而且

$$\phi(-1)=\exp[-a(\ln 1+i\pi)]=e^{-ia\pi}\neq 0.$$

这表明点 $z=-1$ 是由(2)式所定义函数 $f(z)$ 的简单极点，且

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}f(z)=e^{-ia\pi}.$$

因此(3)式可以写作

$$(1-e^{-i2a\pi})\int_{\rho}^{R}\frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r=2\pi ie^{-ia\pi}-\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z-\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z.\tag{4}$$

现在由(2)式中 $f(z)$ 的定义，有

$$\left|\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\rho^{-a}}{1-\rho}2\pi\rho=\frac{2\pi}{1-\rho}\rho^{1-a}$$

和

$$\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{R^{-a}}{R-1}2\pi R=\frac{2\pi R}{R-1}\cdot\frac{1}{R^a}.$$

由于 $0<a<1$，显然这两个积分的值分别当 ρ 趋近 0 时和 R 趋近 ∞ 时为 0，因此，若在等式(4)中让 ρ 趋近 0，R 趋近 ∞，得到

$$(1-e^{-i2a\pi})\int_{0}^{\infty}\frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r=2\pi ie^{-ia\pi},$$

或者

$$\int_{0}^{\infty}\frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r=2\pi i\frac{e^{-ia\pi}}{1-e^{-i2a\pi}}\cdot\frac{e^{ia\pi}}{e^{ia\pi}}=\pi\frac{2i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}.$$

显然，有

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin a\pi}\quad(0<a<1).\tag{5}$$

275

练习

在练习 1 到 4 中，取(第 75 节)如图 97 的曲线.

1. 导出积分公式

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(b-a)\quad(a\geqslant 0,b\geqslant 0).$$

然后利用倍角公式 $1-\cos(2x)=2\sin^2 x$，指出如何推导出如下积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. 计算广义积分

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}dx(-1 < a < 3 \text{ 和 } x^a = \exp(a\ln x)).$$

答案：$\dfrac{(1-a)\pi}{4\cos(a\pi/2)}$.

3. 利用函数

$$f(z) = \frac{z^{1/3}\log z}{z^2+1} = \frac{e^{(1/3)\log z}\log z}{z^2+1} \quad \left(|z|>0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right),$$

证明下列两个广义积分

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\ln x}{x^2+1}dx = \frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4. 利用函数

$$f(z) = \frac{(\log z)^2}{z^2+1} \quad \left(|z|>0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

证明下列两个广义积分

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}dx = \frac{\pi^3}{8}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0.$$

提示：利用 72 节练习 1 中得到的积分公式.

5. 利用函数

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(z+a)(z+b)} = \frac{e^{(1/3)\log z}}{(z+a)(z+b)} \quad (|z|>0, 0<\arg z<2\pi)$$

和一个类似 77 节图 99 的闭围道证明下列广义积分

276

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b} \quad (a>b>0).$$

6. 选取多值函数

$$f(z) = \frac{z^{-1/2}}{z^2+1} = \frac{e^{(-1/2)\log z}}{z^2+1}$$

的适当分支证明

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

在下列情况下成立：(a)75 节中图 97 的封闭路径；(b)77 节中图 99 封闭围道.

7. β 函数是一个如下的具有两个实变量的函数：

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (p>0, q>0).$$

利用映射 $t=1/(x+1)$ 和 77 节例子中的结果证明

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\quad(0<p<1).$$

8. 已知有两条简单围道如图 100，它们是由 77 节图 99 中的两个圆 C_ρ 和 C_R 分割开所形成的两个环，两个封闭围道中的组成部分 L 和 $-L$ 是射线 $\arg z=\theta_0$ 的一部分，其中 $\pi<\theta_0<3\pi/2$，Γ_ρ 和 γ_ρ 是圆 C_ρ 上的曲线，Γ_R 和 γ_R 是圆 C_R 上的曲线，

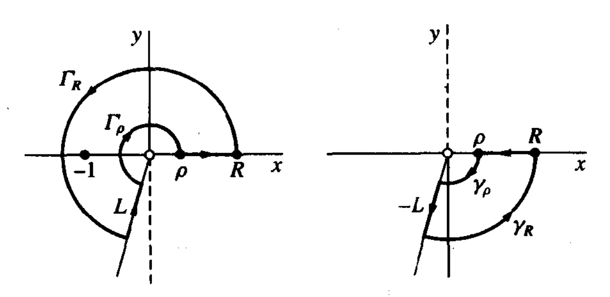


图 100

(a)利用柯西留数定理推导多值函数 $z^{-a}/(z+1)$ 的分支

$$f_1(z)=\frac{z^{-a}}{z+1}\quad\left(|z|>0,-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)$$

在图 100 中左边封闭围道上积分满足

$$\int_\rho^R\frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r+\int_{\Gamma_R}f_1(z)\mathrm{d}z+\int_L f_1(z)\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_\rho}f_1(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1}f_1(z).$$

277

(b)利用柯西-古萨定理计算多值函数 $z^{-a}/(z+1)$ 的分支

$$f_2(z)=\frac{z^{-a}}{z+1}\quad\left(|z|>0,\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right)$$

在图 100 中右边封闭围道上的积分，证明

$$-\int_\rho^R\frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1}\mathrm{d}r+\int_{\gamma_\rho}f_2(z)\mathrm{d}z-\int_L f_2(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_R}f_2(z)\mathrm{d}z=0.$$

(c)指出在(a)和(b)部分中的最后一行中，函数 $z^{-a}/(z+1)$ 的分支 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 可以被分支

$$f(z)=\frac{z^{-a}}{z+1}\quad(|z|>0,0<\arg z<2\pi).$$

代替，然后加上这两条线的相应的边，就可以得到 77 节中的等式(3).

78 含有正弦和余弦的定积分

留数定理也可以用来计算下列类型的定积分

$$\int_0^{2\pi}F(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta.\tag{1}$$

上述的 θ 的变化范围是 0 到 2π，我们可以把 θ 看作是以原点为圆心的圆 C 上的点 z 的辐角主值，也即有

$$z = e^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \tag{2}$$

则有

$$\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta;$$

和关系式

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{3}$$

由(2)和(3)，(1)式可以表达成 z 沿着圆周 C 的正方向的围道积分

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}. \tag{4}$$

显然，积分式(1)是积分式(4)的参数形式，由 39 节中表达式(2)可知，当积分式(4)中的被积 278 函数是关于 z 的一个有理函数，则根据柯西留数定理，如果多项式中分母的零点都确定了，而且这些零点都不在圆周 C 上，那么就可以将积分计算出来.

例 我们来证明

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \quad (-1 < a < 1). \tag{5}$$

积分公式在 $a=0$ 时显然成立，我们在推导中不考虑这种情形，利用表达式(3)，积分可以表达为

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1}\mathrm{d}z, \tag{6}$$

其中 C 是正方向的圆周 $|z|=1$，对被积函数的分母求根，可以得到两个纯虚根

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i, \quad z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i.$$

因此，如果 $f(z)$ 表示被积函数，则有

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

注意到 $|a|<1$，

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1.$$

同时，又有 $|z_1 z_2|=1$ 和 $|z_1|<1$，因此在 C 上没有其他奇点，在圆周 C 内仅有一个奇点 z_1，可以利用函数

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_1} \quad 其中 \quad \phi(z) = \frac{2/a}{z - z_2}.$$

来计算相应的留数 B_1，而 z_1 是一个简单极点，则

$$B_1=\phi(z_1)=\frac{2/a}{z_1-z_2}=\frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}.$$

因此有

$$\int_C\frac{2/a}{z^2+(2i/a)z-1}\mathrm{d}z=2\pi iB_1=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}};$$

这样就得到公式(5). [279]

这种方法表明了当被积函数是以 θ 为自变量的关于 sin 或 cos 函数，可以利用(2)式来做映射，例如

$$\cos2\theta=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}=\frac{(e^{i\theta})^2+(e^{i\theta})^{-2}}{2}=\frac{z^2+z^{-2}}{2}.$$

练习

利用留数计算下列定积分：

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+4\sin\theta}$.

答案：$\dfrac{2\pi}{3}$.

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$.

答案：$\sqrt{2}\pi$.

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta}{5-4\cos2\theta}$.

答案：$\dfrac{3\pi}{8}$.

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+a\cos\theta}\quad(-1<a<1)$.

答案：$\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos2\theta\mathrm{d}\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\quad(-1<a<1)$.

答案：$\dfrac{a^2\pi}{1-a^2}$.

6. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}\quad(a>1)$.

答案：$\dfrac{a\pi}{(\sqrt{a^2-1})^3}$.

7. $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta\quad(n=1,2,\cdots)$.

答案：$\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$. [280]

79 幅角原理

若函数 f 在区域 D 内除了极点外是解析的，则称函数 f 在区域 D 内是亚纯的. 假设 f 在区域 D 内亚纯，D 的边界是一个正向的简单闭围道 C，f 在 C 上解析没有零点，曲线 C 在映射 $w=f(z)$ 下的像 Γ 也是 w 平面的闭围道，但不一定是简单围道. 在平面上如图 101，当点 z 沿围道 C 的正方向移动时，它的像 w 以定方向沿 Γ 移动，这就决定了 Γ 的方向，注意到，由于 f 在围道 C 上没有零点，因此围道 Γ 在 w 平面不经过原点.

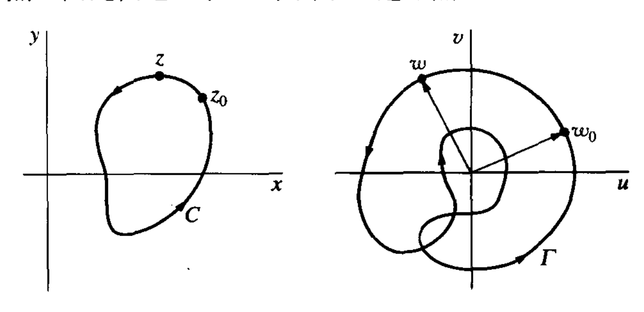


图 101

假设 w 和 w_0 都是围道 Γ 上的点，其中 w_0 是不动点，ϕ_0 是 w_0 的幅角，然后使 w 的幅角主值以角 ϕ_0 为起点连续变化. 由于点 w 是从点 w_0 开始，并且通过映射 $w=f(z)$ 按照指定的方向环绕围道 Γ 一周，当点 w 回到起点 w_0 时，这时 w 的幅角是 w_0 幅角中的某一个值，我们用 ϕ_1 表示. 因此，当点 w 在围道 Γ 上沿着一定的方向环绕 Γ 一周时，它的幅角的变化是 $\phi_1-\phi_0$. 显然，该值的变化大小是由我们选择的 w_0 决定的，由于 $w=f(z)$，因此当 z 从 z_0 开始，沿着 C 的正方向绕一周时，$\phi_1-\phi_0$ 的值事实就是 $f(z)$ 的幅角的改变值. 我们记

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0.$$

$\Delta_C \arg f(z)$ 的值显然是 2π 的整数倍，且整数

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

表示点 w 在 w 平面上环绕原点的次数，因此，这个整数有时称为关于原点 $\omega=0$ 的环绕数，当 Γ 围绕原点以逆时针方向旋转时，这个整数为正，反之，为负. 当围道 Γ 内不包含原点时，这个数为零，关于这个事实的证明留作练习. 环绕数由围道 C 内的零点数和极点数决定，根据 69 节练习 11，极点数必定是有限的，类似地可以理解 $f(z)$ 在 C 内并不恒等于零，这很简单就可证明(80 节练习 4)，f 的零点数目有限而且都是有限阶. 现在假设 f 在 C 内有 Z 个零点和 P 个极点，若 z_0 为 f 的 m_0 重根，我们认为 f 在 z_0 有 m_0 个根，同样若 z_0 为 f 的 m_p 阶极点，这个极点将被计算 m_p 次，下面的定理，幅角原理，说明环绕数即 $Z-P$ 之差.

281

定理 假设

(i) 函数 $f(z)$ 在一个正向简单闭围道 C 所围成的区域内亚纯；

(ii) $f(z)$ 在 C 上解析且没有零点；

(iii) 按重数计算，Z 和 P 分别为 $f(z)$ 在 C 内的零点数和极点数，

则

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = Z - P. \tag{1}$$

为了证明该结论，沿围道 C，用两种不同的方法计算 $f'(z)/f(z)$ 的积分，首先，令 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是 C 的参数表示，因此

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \int_a^b \frac{f'[z(t)]z'(t)}{f[z(t)]}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

由于在映射 $w=f(z)$ 下，C 的像 Γ 不穿过 w 平面上的零点，因此 C 上的任何点 $z=z(t)$ 可以表示为指数形式，若 $w=\rho(t)\exp[i\phi(t)]$，则

$$f[z(t)] = \rho(t)e^{i\phi(t)} \quad (a \leqslant t \leqslant b); \tag{3}$$

而且，沿围道 Γ 的每一光滑弧线，则有(参考 38 节练习 5)

$$f'[z(t)]z'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f[z(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho(t)e^{i\phi(t)}] = \rho'(t)e^{i\phi(t)} + i\rho(t)e^{i\phi(t)}\phi'(t). \tag{4}$$

由于 $\rho'(t)$ 和 $\phi'(t)$ 在区间 $(a\leqslant t\leqslant b)$ 上是分段连续的，现在用(3)式和(4)式写积分(2)如下

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t + i\int_a^b \phi'(t)\mathrm{d}t = \ln\rho(t)\Big|_a^b + i\phi(t)\Big|_a^b.$$

282

但是

$$\rho(b) = \rho(a) \quad 和 \quad \phi(b) - \phi(a) = \Delta_C \arg f(z).$$

因此

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = i\Delta_C \arg f(z). \tag{5}$$

另外一种计算积分(5)的方法是利用柯西留数定理，具体来说，$f'(z)/f(z)$ 在 C 内和 C 上除 f 的零点和极点外是解析的，若 z_0 为 f 的 m_0 重零点，则(68 节)

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z), \tag{6}$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 解析且不为零，因此

$$f'(z_0) = m_0(z - z_0)^{m_0 - 1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z),$$

或者

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{7}$$

由于 $g'(z)/g(z)$ 在 z_0 解析，因此在 z_0 可作泰勒级数展开，由(7)式可知 z_0 为 $f'(z)/f(z)$ 的简单极点，留数为 m_0，另一方面，若 f 在 z_0 有 m_p 重极点，我们从 66 节的定理知

$$f(z) = (z - z_0)^{-m_p}\phi(z), \tag{8}$$

其中 $\phi(z)$ 在 z_0 解析且不为零，若把(6)式的正整数 m_0 换为 $-m_p$，则(8)式和(6)式相同，由此从(7)式显然可知 z_0 为 $f'(z)/f(z)$ 的简单极点，留数为 $-m_p$，利用留数定理，则可得

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2\pi i(Z - P). \tag{9}$$

利用(5)式和(9)式就可得到表达式(1).

例 函数 $1/z^2$ 仅有的奇点是在原点的级为 2 的极点，且在有限平面上没有零点，特别地，这个函数在单位圆 $z=e^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 上解析，没有零点，若我们让 C 沿顺时针方向，由上述定理，有

283

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg\left(\frac{1}{z^2}\right)=-2.$$

即 C 在映射 $w=1/z^2$ 下的像 Γ 绕原点 $w=0$ 沿顺时针方向两周，这可以通过 Γ 的参数表示 $w=e^{-i2\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 而直接证明.

80 儒歇定理

本节的主要结果是儒歇定理，它由 79 节的幅角原理而得，它在复平面上的一个局部区域非常有用，这个局部区域上往往给定一个有零点的解析函数.

定理 假设

(i) 函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭围道 C 上和它的内部均是解析的；

(ii) 在围道 C 上每点均有 $|f(z)|>|g(z)|$ 成立，则按重数计算，函数 $f(z)$ 和 $f(z)+g(z)$ 在围道 C 内有相同的零点.

定理中围道 C 的方向显然是不重要的. 因此，不妨设为正方向，注意到，$f(z)$ 和 $f(z)+g(z)$ 在 C 上都没有零点，因此当 z 在围道 C 上时，有

$$|f(z)|>|g(z)|\geqslant 0 \quad 和 \quad |f(z)+g(z)|\geqslant \big||f(z)|-|g(z)|\big|>0.$$

若用 Z_f 和 Z_{f+g} 分别表示 $f(z)$ 和 $f(z)+g(z)$ 在 C 内按重数计算的零点数，由 79 节中的定理得

$$Z_f=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z) \quad 和 \quad Z_{f+g}=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[f(z)+g(z)].$$

相应地，由于

$$\begin{aligned}\Delta_C\arg[f(z)+g(z)]&=\Delta_C\arg\left\{f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\}\\&=\Delta_C\arg f(z)+\Delta_C\arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right],\end{aligned}$$

显然有

$$Z_{f+g}=Z_f+\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg F(z), \tag{1}$$

其中

284

$$F(z)=1+\frac{g(z)}{f(z)}.$$

但是

$$|F(z)-1|=\frac{|g(z)|}{|f(z)|}<1;$$

这意味着，在映射 $w=F(z)$ 下，C 的像落在开圆盘 $|w-1|<1$ 内，这个像不包含 $w=0$，因

此 $\Delta_C \arg F(z)=0$，由(1)式可得 $Z_{f+g}=Z_f$，定理得证.

例 为了确定下面等式

$$z^7-4z^3+z-1=0 \tag{2}$$

在圆 $|z|=1$ 内根的数目，记

$$f(z)=-4z^3 \quad 和 \quad g(z)=z^7+z-1.$$

注意到，当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|=4|z|^3=4$ 和 $|g(z)|\leqslant|z|^7+|z|+1=3$，因此满足儒歇定理的条件，由于 $f(z)$ 在圆 $|z|=1$ 内按重数计算有 3 个根，$f(z)+g(z)$ 亦然，即(2)式有 3 个根.

练习

1. C 为单位圆 $|z|=1$，方向为正，利用 79 节的定理确定 $\Delta_C \arg f(z)$ 的值，

(a) $f(z)=z^2$； (b) $f(z)=(z^3+2)/z$； (c) $f(z)=(2z-1)^7/z^3$.

答案：(a) 4π； (b) -2π； (c) 8π.

2. 假设函数 f 在简单闭围道 C 上和内部是解析的，并且 $f(z)$ 在曲线 C 上没有任何零点，使 C 在映射 $w=f(z)$ 下的像是如图 102 所示的闭围道 Γ，看图确定 $\Delta_C \arg f(z)$ 的值，并利用 79 节的定理确定 f 在 C 内按重数计算的零点数目.

答案：6π；3.

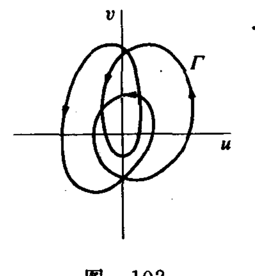


图 102

285

3. 利用 79 节的注，假设 Γ 不包含原点 $w=0$，且有一条从原点出发与 Γ 不相交的射线，通过观察，我们知道，当点 z 绕 C 一周时，$\Delta_C \arg f(z)$ 的模一定小于 2π，通过回忆知道，$\Delta_C \arg f(z)$ 是 2π 的整数倍，指出为什么 Γ 关于原点 $w=0$ 的环绕数一定是 0.

4. 假设函数 f 在以简单闭围道 C 为边界的区域 D 内亚纯，f 在 C 上解析没有零点，D_0 表示 D 内除极点外，所有点组成的区域，利用 26 节的引理和 69 节练习 10，指出若 $f(z)$ 在 D_0 内不恒等于零，那 f 在 D 内的零点都是有限阶的，而且零点个数也是有限的。

提示：注意到若 D 内的点 z_0 为 f 的无限阶零点，则一定存在 z_0 的一个邻域，在此邻域中 $f(z)$ 恒等于零.

5. 假设函数 f 在正向简单闭围道 C 内和 C 上解析，且在 C 上没有零点，证明：若 f 在 C 内有 n 个零点 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$，其中每一个 z_k 的重数为 m_k，则

$$\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}m_k z_k.$$

[当 $P=0$ 时，与 79 节(9)式比较.]

6. 确定下列多项式在圆 $|z|=1$ 内按重数计算的零点数：

(a) $z^6-5z^4+z^3-2z$； (b) $2z^4-2z^3+2z^2-2z+9$

答案：(a) 4； (b) 0.

7. 确定下列多项式在圆 $|z|=2$ 内按重数计算的零点数：

(a)z^4+3z^3+6；　　(b)$z^4-2z^3+9z^2+z-1$；　　(c)$z^5+3z^3+z^2+1$.

答案：(a)3；　(b)2；　(c)5.

8. 确定等式

$$2z^5-6z^2+z+1=0$$

在圆环$1\leqslant|z|<2$内按重数计算的根的数目.

答案：3.

9. 证明：若c是一个复数，使得$|c|>e$，则等式$cz^n=e^z$在圆$|z|=1$内按重数计算有

286

n个根.

10. 记$f(z)=z^n$和$g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$，利用儒歇定理证明任意多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n \quad (a_n\neq 0),$$

其中$n\geqslant 1$，恰有按重数计算的n个零点，请给出代数基本定理(49节定理2)的另一个证明.

提示：注意到，可以让a_n为单位元，然后证明在圆$|z|=R$上$|g(z)|<|f(z)|$，其中R充分大，特别地，大于

$$1+|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|.$$

11. 49节中的不等式(5)，保证了多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n \quad (a_n\neq 0)$$

$n\geqslant 1$的零点都位于圆$|z|=R$内，练习4也告诉我们多项式的零点的级有限和零点数目N有限，利用79节中的(9)式和64节中的定理证明

$$N=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{P'(1/z)}{z^2P(1/z)},$$

其中零点按重数计算，然后计算留数以证明$N=n$(对照练习10).

12. 设两函数f和g如80节儒歇定理所述，围道C方向为正，定义函数

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}\mathrm{d}z \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

按照下列的步骤给出儒歇定理的另一个证明.

(a)指出所定义的$\Phi(t)$中，为什么被积函数的分母在C上不会为0，而保证了积分的存在.

(b)t和t_0是区间$0\leqslant t\leqslant 1$内的任意两点，证明

$$|\Phi(t)-\Phi(t_0)|=\frac{|t-t_0|}{2\pi}\left|\int_C\frac{fg'-f'g}{(f+tg)(f+t_0g)}\mathrm{d}z\right|.$$

在指出为什么不等式

$$\left|\frac{fg'-f'g}{(f+tg)(f+t_0g)}\right|\leqslant\frac{|fg'-f'g|}{(|f|-|g|)^2}$$

在C上成立之后，证明存在一个正常数A，与t和t_0无关，使得

$$|\Phi(t)-\Phi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|.$$

287

从这个不等式可以得到$\Phi(t)$在区间$0\leqslant t\leqslant 1$上连续.

(c)通过考虑 79 节的(9)式，指出为什么对每一个 t，$0\leqslant t\leqslant 1$，函数 Φ 的值表示了 $f(z)+tg(z)$ 在 C 内的零点数目，然后和(b)一样可以推出 Φ 是连续的，$f(z)$ 和 $f(z)+g(z)$ 在 C 内按重数计算有相同数目的零点.

81 逆拉普拉斯变换

假设复变量 s 的函数 F 在整个有限 s 平面上除了有限个孤立奇点外解析，L_R 表示从 $s=\gamma-iR$ 到 $s=\gamma+iR$ 的垂直线段，其中常数 γ 为正且充分大，使得 F 的奇点都位于线段的左方(图 103).

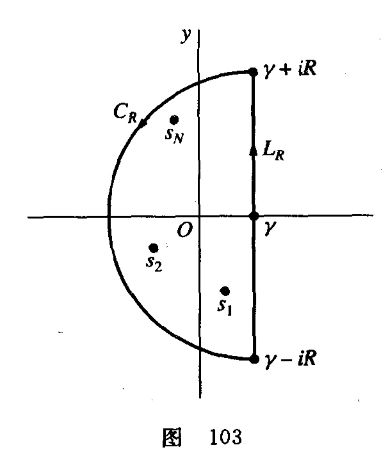


图 103

实变量 t 的新函数 f 当 t 为正时，定义为等式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s \quad (t>0), \tag{1}$$

因此这个极限存在，(1)式常被表示为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{P.V.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}F(s)\mathrm{d}s \quad (t>0) \tag{2}$$

[对照 71 节的(3)式]，该积分表达式称被为布罗米奇(Bromiwich)积分.

可以证明，当所讨论的函数的条件更广泛时，$f(t)$是 $F(s)$的逆拉普拉斯变换，若 $F(s)$是 $f(t)$的拉普拉斯变换，定义为

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

288

那么，$f(t)$可以通过(2)得到，其中 γ 的选择是不重要的，只要 F 的所有奇点都位于 L_R 的左侧[⊖]，拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换对于解决常微分方程和偏微分方程都非常有用.

当 $F(s)$确定时，留数经常被用来计算(1)的极限，具体来说，令 $s_n(n=1,2,\cdots,N)$表示

⊖ 关于拉普拉斯变换对于这些细节的进一步处理，请参考 R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, 3d ed., 1972，其中讨论了具有无限多个孤立奇点或者支割线的变换 $F(s)$.

$F(s)$的奇点，然后令 R_0 表示它们模的最大值，考虑半圆 C_R，其参数表示为

$$s=\gamma+Re^{i\theta}\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}\right),\tag{4}$$

其中 $R>R_0+\gamma$，注意，对于每一个 s_n 都有

$$|s_n-\gamma|\leqslant|s_n|+\gamma\leqslant R_0+\gamma<R.$$

因此，奇点都位于以 C_R 和 L_R 为边界的半圆内(见图 103)，柯西留数定理告诉我们

$$\int_{L_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s=2\pi i\sum_{n=1}^{N}\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]-\int_{C_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s.\tag{5}$$

现在假设，对 C_R 上的所有点，存在正常数 M_R 使得 $|F(s)|\leqslant M_R$，其中当 R 趋于∞时，M_R 趋于 0，我们利用 C_R 的参数表示(4)式有

$$\int_{C_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\exp(\gamma t+Rte^{i\theta})F(\gamma+Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

然后，由于

$$|\exp(\gamma t+Rte^{i\theta})|=e^{\gamma t}e^{Rt\cos\theta}\quad 和\quad |F(\gamma+Re^{i\theta})|\leqslant M_R,$$

我们得到

289

$$\left|\int_{C_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant e^{\gamma t}M_RR\int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{Rt\cos\theta}\mathrm{d}\theta.\tag{6}$$

但是，代入 $\phi=\theta-(\pi/2)$，和 74 节的(2)式一起表明

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{Rt\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}e^{-Rt\sin\phi}\mathrm{d}\phi<\frac{\pi}{Rt}.$$

不等式(6)因此变为

$$\left|\int_{C_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{e^{\gamma t}M_R\pi}{t},\tag{7}$$

上式证明了

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}e^{st}F(s)\mathrm{d}s=0.\tag{8}$$

在(5)式中，将 R 趋向∞，则我们可以看到在(1)式中定义的函数 $f(t)$存在并且可以用下列式子表示，即

$$f(t)=\sum_{n=1}^{N}\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]\quad(t>0).\tag{9}$$

在拉普拉斯变换的许多应用中，比如在讨论热传导和机械振动出现的偏微分方程的解时，函数 $F(s)$在有限平面上除了孤立奇点 $s_n(n=1,2,\cdots)$的无限集合外是解析的，而且这些点位于垂线 $\operatorname{Re}s=\gamma$ 的左侧，寻找 $f(t)$的方法经常是这样的，将(9)式的有限和代之以留数的无限级数：

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]\quad(t>0).\tag{10}$$

最基本的修改为代替垂线 L_R 为从 $s=\gamma-ib_N$ 到 $s=\gamma+ib_N$ 的垂线 $L_N(N=1,2,\cdots)$，圆弧 C_R

被从 $\gamma+ib_N$ 到 $\gamma-ib_N$ 的曲线 $C_N(N=1, 2, \cdots)$ 所代替，使得对每一个 N，L_N+C_N 的和是一个包含奇点 s_1，s_2，…，s_N 的简单闭围道，一旦证明了

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C_N} e^{st}F(s)\mathrm{d}s = 0, \tag{11}$$

(2)式中的 $f(t)$ 变为(10)式.

围道 C_N 的选择由 $F(s)$ 的性质来决定，一般的选择是圆或抛物线和矩形路径，而简单封闭围道 L_N+C_N 不必恰包含 N 个奇点，例如，当在区域 L_N+C_N 和 $L_{N+1}+C_{N+1}$ 之间包含 $F(s)$ 的两个奇点时，$e^{st}F(s)$ 对应的留数对可以简单地看做级数(10)的单独一项，由于在任何条件下得到极限(11)都是非常繁杂的，在接下来的例子和相关的练习中，凡是涉及有无穷多个极点，我们均假设条件(11)成立[⊖]，因此，我们只是在形式上利用(10)式. 290

82 举例

81 节中表达式(9)和(10)中 $e^{st}F(s)$ 的留数之和的计算经常用到本节练习 12 和 13 中所用的技巧，我们在这里先叙述这些技巧，然后讲例子.

假设 s_0 为 $F(s)$ 的 m 阶极点，在去心圆 $0<|s-s_0|<R_2$ 上的洛朗展开式的主要部分为

$$\frac{b_1}{s-s_0}+\frac{b_2}{(s-s_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(s-s_0)^m} \quad (b_m\neq 0).$$

然后

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)] = e^{s_0t}\left[b_1+\frac{b_2}{1!}t+\cdots+\frac{b_m}{(m-1)!}t^{m-1}\right]. \tag{1}$$

当极点 s_0 形如 $s_0=\alpha+i\beta(\beta\neq0)$，且在 $F(s)$ 的解析点有 $\overline{F(s)}=F(\bar{s})$（参见 27 节），$\overline{s_0}=\alpha-i\beta$ 也是 m 级极点，而且，当 t 是实数时，有

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]+\operatorname*{Res}_{s=\overline{s_0}}[e^{st}F(s)]\\&=2e^{\alpha t}\operatorname{Re}\left\{e^{i\beta t}\left[b_1+\frac{b_2}{1!}t+\cdots+\frac{b_m}{(m-1)!}t^{m-1}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2}$$

注意到若 s_0 是一个简单极点($m=1$)，表达式(1)和(2)分别为

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)] = e^{s_0t}\operatorname*{Res}_{s=s_0}F(s) \tag{3}$$

和

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]+\operatorname*{Res}_{s=\overline{s_0}}[e^{st}F(s)] = 2e^{\alpha t}\operatorname{Re}[e^{i\beta t}\operatorname*{Res}_{s=s_0}F(s)], \tag{4}$$ 291

例 1 我们来求与

$$F(s)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2} \quad (a>0). \tag{5}$$

⊖ 关于得到极限的详细方法，请参考 R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, 3d ed., 1972，实际上，下一节例 3 所找的逆变换在该书 pp. 220-226 有详细证明.

对应的函数 $f(t)$.

$F(s)$的奇点是共轭点

$$s_0 = ai \quad 和 \quad \overline{s_0} = -ai.$$

将 $F(s)$表示为

$$F(s) = \frac{\phi(s)}{(s-ai)^2}, 其中 \phi(s) = \frac{s}{(s+ai)^2},$$

$\phi(s)$在点 $s_0=ai$ 是解析和非零的，因此 s_0 是 $F(s)$ $m=2$ 级极点，此外，在 $F(s)$的解析点上 $\overline{F(s)}=F(\bar{s})$，因此，$\overline{s_0}$也是 $F(s)$的阶为 2 的极点，由(2)式可以得到

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s_0}}[e^{st}F(s)] = 2\mathrm{Re}[e^{iat}(b_1 + b_2 t)], \tag{6}$$

其中 b_1 和 b_2 是函数 $F(s)$在 ai 点的主要部分

$$\frac{b_1}{s-ai} + \frac{b_2}{(s-ai)^2}$$

的系数，将 $\phi(s)$在 $s_0=ai$ 处展开为 Taylor 级数，利用前两项可以很容易确定这两个系数，即

$$F(s) = \frac{1}{(s-ai)^2}\phi(s) = \frac{1}{(s-ai)^2}\left[\phi(ai) + \frac{\phi'(ai)}{1!}(s-ai) + \cdots\right]$$
$$= \frac{\phi(ai)}{(s-ai)^2} + \frac{\phi'(ai)}{s-ai} + \cdots \quad (0 < |s-ai| < 2a).$$

直接可以得到 $\phi(ai)=-i/(4a)$和 $\phi'(ai)=0$，这样就可以得到 $b_1=0$ 和 $b_2=-i/(4a)$，因此，(6)式就变为

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s_0}}[e^{st}F(s)] = 2\mathrm{Re}\left[e^{iat}\left(-\frac{i}{4a}t\right)\right] = \frac{1}{2a}t\sin at.$$

然后，如果 $F(s)$满足 81 节中用楷体字写的边界条件，我们可以得到结论

$$f(t) = \frac{1}{2a}t\sin at \quad (t>0), \tag{7}$$

为证明边界条件，我们假设 s 为半圆上任意一点，即

292

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right),$$

其中 $\gamma>0$ 和 $R>a+\gamma$；同时我们有

$$|s| = |\gamma + Re^{i\theta}| \leqslant \gamma + R \quad 和 \quad |s| = |\gamma + Re^{i\theta}| \geqslant |\gamma - R| = R - \gamma > a.$$

由于

$$|s^2 + a^2| \geqslant ||s|^2 - a^2| \geqslant (R-\gamma)^2 - a^2 > 0,$$

可以得到结论

$$|F(s)| = \frac{|s|}{|s^2+a^2|^2} \leqslant M_R \quad 其中 \quad M_R = \frac{\gamma + R}{[(R-\gamma)^2 - a^2]^2}.$$

由于 $R\to\infty$时 $M_R\to 0$，因此需要的边界条件就建立了.

例 2 当

$$F(s)=\frac{\tanh s}{s^2}=\frac{\sinh s}{s^2\cosh s},$$

时，为了找到函数 $f(t)$，注意到 $F(s)$在 $s=0$ 和 $\cosh s$ 的零点(34 节)

$$s=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

有孤立奇点，即如下点

$$s_0=0\quad 和\quad s_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}i,\quad \overline{s_n}=-\frac{(2n-1)\pi}{2}i\quad(n=1,2,\cdots),$$

则有

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]+\sum_{n=1}^{\infty}\{\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]+\operatorname*{Res}_{s=\overline{s_n}}[e^{st}F(s)]\}. \tag{8}$$

麦克劳林级数的商为洛朗级数表示

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{\sinh s}{\cosh s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{3}s+\cdots\quad\left(0<|s|<\frac{\pi}{2}\right),$$

这告诉我们，$s_0=0$ 是 $F(s)$的简单极点，留数为 1，因此根据(3)式有

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]=\operatorname*{Res}_{s=s_0}F(s)=1, \tag{9}$$

通过应用 69 节中的定理 2 的方法来找到简单极点和确定这些点的留数，可以很容易地找到 [293] $F(s)$在点 $s_n(n=1,2,\cdots)$的留数，具体地说，首先有

$$F(s)=\frac{p(s)}{q(s)},其中\ p(s)=\sinh s\ 和\ q(s)=s^2\cosh s$$

同时又有

$$\sinh s_n=\sinh\left[i\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=i\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-i\cos n\pi=(-1)^{n+1}i\neq0.$$

然后，由于

$$p(s_n)=\sinh s_n\neq0,\quad q(s_n)=0,\quad 和\quad q'(s_n)=s_n^2\sinh s_n\neq0,$$

可以得到

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}F(s)=\frac{p(s_n)}{q'(s_n)}=\frac{1}{s_n^2}=-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

[比较 69 节中的例 3]由恒等式

$$\overline{\sinh s}=\sinh\bar{s}\quad 和\quad \overline{\cosh s}=\cosh\bar{s}$$

(参见 34 节练习 11)可以得到在 $F(s)$的解析点处有$\overline{F(s)}=F(\bar{s})$，因此$\overline{s_n}$也是 $F(s)$的一个简单极点，(4)式就为

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]+\operatorname*{Res}_{s=\overline{s_n}}[e^{st}F(s)]$$
$$=2\mathrm{Re}\left\{-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\exp\left[i\,\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right]\right\}$$

$$=-\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{10}$$

最后，将(9)和(10)代入到(8)中，就可以得到结果

$$f(t)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\quad(t>0).\tag{11}$$

例 3 我们现在考虑函数

294

$$f(s)=\frac{\sinh(xs^{1/2})}{s\sinh(s^{1/2})}\quad(0<x<1),\tag{12}$$

其中 $s^{1/2}$ 表示这个双值函数的任意分支，然而，我们假设在分子和分母里用同一个分支，当 s 不是 $F(s)$ 的奇点时，有

$$F(s)=\frac{xs^{1/2}+(xs^{1/2})^3/3!+\cdots}{s[s^{1/2}+(s^{1/2})^3/3!+\cdots]}=\frac{x+x^3s/6+\cdots}{s+s^2/6+\cdots}\tag{13}$$

$s=0$ 显然是它的一个奇点，另外我们知道 $s^{1/2}$ 的支割线并不位于负实轴，因此 sinh(1/2)沿此轴有定义，若其他的奇点为 $s^{1/2}=\pm n\pi i(n=1,2,\cdots)$，点

$$s_0=0\quad 和\quad s_n=-n^2\pi^2\quad(n=1,2,\cdots)$$

构成 $F(s)$ 的奇点集，问题现在转化为计算用形式级数表示的留数，

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)].\tag{14}$$

(13)式右边所表示的幂级数的商表明 s_0 是 $F(s)$ 的简单极点，留数为 x，因此(3)式告诉我们

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]=x.\tag{15}$$

至于 $F(s)$ 在奇点 $s_n=-n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$ 的留数，我们记

$$F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}\quad 其中\quad p(s)=\sinh(xs^{1/2})\quad 和\quad q(s)=s\ \sinh(s^{1/2}).$$

如例 2 所做，应用 69 的定理 2，注意到

$$p(s_n)=\sinh(xs_n^{1/2})\neq 0,\quad q(s_n)=0,q'(s_n)=\frac{1}{2}s_n^{1/2}\cosh(s_n^{1/2})\neq 0,$$

这告诉我们 s_n 是 $F(s)$ 的简单极点，留数为

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}F(s)=\frac{p(s_n)}{q'(s_n)}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x.$$

因此，由于(3)式，

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]=e^{s_nt}\operatorname*{Res}_{s=s_n}F(s)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x.\tag{16}$$

将(15)式和(16)式代入(14)式，得到函数

295

$$f(t)=x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x\quad(t>0).\tag{17}$$

练习

在练习 1 到 5，利用 81 节和 82 节的例 1 的方法，找到与给定函数 $F(s)$对应的函数 $f(t)$.

1. $F(s)=\dfrac{2s^3}{s^4-4}$.

答案：$f(t)=\cosh\sqrt{2}t+\cos\sqrt{2}t$.

2. $F(s)=\dfrac{2s-2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$.

答案：$f(t)=e^{-t}(\sin 2t+\cos 2t-1)$.

3. $F(s)=\dfrac{12}{s^3+8}$.

答案：$f(t)=e^{-2t}+e^{t}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t-\cos\sqrt{3}t)$.

4. $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\quad(a>0)$.

答案：$f(t)=t\ \cos at$.

5. $F(s)=\dfrac{8a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}\quad(a>0)$.

提示：参考 65 节练习 4，利用 $F(s)$在 ai 的主要部分.

答案：$f(t)=(1+a^2t^2)\sin at-at\ \cos at$.

在练习 6 到 11 中，利用关于留数的无限形式级数和 82 节的例 2 和例 3 的方法，找到与给定函数 $F(s)$对应的函数 $f(t)$.

6. $F(s)=\dfrac{\sinh(xs)}{s^2\cosh s}\quad(0<x<1)$.

答案：$f(t)=x+\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2}$.

7. $F(s)=\dfrac{1}{s\ \cosh(s^{1/2})}$.

答案：$f(t)=1+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\exp\left[-\dfrac{(2n-1)^2\pi^2t}{4}\right]$.

296

8. $F(s)=\dfrac{\coth(\pi s/2)}{s^2+1}$.

答案：$f(t)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nt}{4n^2-1}$ ⊖.

9. $F(s)=\dfrac{\sinh(xs^{1/2})}{s^2\sinh(s^{1/2})}\quad(0<x<1)$.

⊖ 这是经过变形的正弦函数 $f(t)=|\sin t|$. 请参考作者 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed., p. 68, 2001.

答案：$f(t)=\frac{1}{6}x(x^2-1)+xt+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x.$

10. $F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s\ \sinh s}.$

答案：$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi t.$

11. $F(s)=\frac{\sinh(xs)}{s(s^2+\omega^2)\cosh s}\quad(0<x<1)$，

其中 $\omega>0$，$\omega\neq\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

答案：$f(t)=\frac{\sin\omega x\sin\omega t}{\omega^2\cos\omega}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n}\cdot\frac{\sin\omega_n x\sin\omega_n t}{\omega^2-\omega_n^2}.$

12. 假设函数 $F(s)$在点 $s=s_0$ 处有一个 m 级极点，在去心圆 $0<|s-s_0|<R_2$ 有洛朗级数展开式

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-s_0)^n+\frac{b_1}{s-s_0}+\frac{b_2}{(s-s_0)^2}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}}+\frac{b_m}{(s-s_0)^m}\quad(b_m\neq 0).$$

注意到$(s-s_0)^mF(s)$在去心圆内有幂级数表示

$$b_m+b_{m-1}(s-s_0)+\cdots+b_2(s-s_0)^{m-2}+b_1(s-s_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-s_0)^{m+n}.$$

通过集中幂级数乘积(61 节中)$(s-s_0)^{m-1}$项中的系数在一起，和整函数 $e^{st}=e^{s_0t}e^{(s-s_0)t}$ 的泰勒级数展开，

$$e^{st}=e^{s_0t}\left[1+\frac{t}{1!}(s-s_0)+\cdots+\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}(s-s_0)^{m-2}+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(s-s_0)^{m-1}+\cdots\right]$$

297

证明如 82 节开头所述：

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]=e^{s_0t}\left[b_1+\frac{b_2}{1!}t+\cdots+\frac{b_{m-1}}{(m-2)!}t^{m-2}+\frac{b_m}{(m-1)!}t^{m-1}\right].$$

13. 点 $s_0=\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$是 $F(s)$的 m 级极点，$F(s)$在去心圆 $0<|s-s_0|<R_2$ 有洛朗级数展开，

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-s_0)^n+\frac{b_1}{s-s_0}+\frac{b_2}{(s-s_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(s-s_0)^m}\quad(b_m\neq 0)$$

假设$\overline{F(s)}=F(\bar{s})$，$F(s)$在 s 解析，

(a)利用 52 节练习 6 的帮助，指出当 $0<|\bar{s}-\overline{s_0}|<R_2$ 时，如何得到

$$F(\bar{s})=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}(\bar{s}-\overline{s_0})^n+\frac{\overline{b_1}}{\bar{s}-\overline{s_0}}+\frac{\overline{b_2}}{(\bar{s}-\overline{s_0})^2}+\cdots+\frac{\overline{b_m}}{(\bar{s}-\overline{s_0})^m}\quad(\overline{b_m}\neq 0).$$

然后，为了得到 $F(s)$ 在去心圆 $0<|s-\overline{s_0}|<R_2$ 的洛朗级数展开，用 s 代替 $\bar{s}$，并推断 $\overline{s_0}$ 是 $F(s)$ 的 m 级极点.

(b)利用练习 12 和上面(a)的结果来证明

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)]+\operatorname*{Res}_{s=\overline{s_0}}[e^{st}F(s)]$$
$$=2e^{\alpha t}\operatorname{Re}\left\{e^{i\beta t}\left[b_1+\frac{b_2}{1!}t+\cdots+\frac{b_m}{(m-1)!}t^{m-1}\right]\right\}$$

当 t 为实数时成立，如 82 节开头所述.

14. $F(s)$ 是练习 13 中的函数，在这里记非零系数 b_m 为指数形式，形如 $b_m=r_m\exp(i\theta_m)$，然后，利用练习 13 中(b)部分的结果证明：当 t 是实数时，$e^{st}F(s)$ 在 $s_0=\alpha+i\beta(\beta\neq0)$ 和 $\overline{s_0}$ 的留数之和包含项

$$\frac{2r_m}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_m).$$

注意到若 $\alpha>0$，当 t 趋近 ∞ 时，乘积 $t^{m-1}e^{\alpha t}$ 趋近 ∞，因此，当通过求 $e^{st}F(s)$ 的留数之和来寻找 $f(t)$ 的逆拉普拉斯映射时，若 $\alpha>0$，上面所说的项并不一定是 $f(t)$ 的组成部分，它被称为共振项，若 $m\geqslant2$ 且 $\alpha=0$，这个项也是共振项. 298

第 8 章　初等函数的映射

在第 2 章的第 12 节和第 13 节中，我们已经介绍过复变函数作为映射或变换的几何解释. 本章中我们考察复变函数如何通过图形方法映射成某种曲线和区域.

我们将介绍初等解析函数映射成各种曲线和各种区域的更多例子. 这些结果在物理问题上的应用将在第 10 章和第 11 章中详细阐明.

83　线性映射

先看映射

$$w = Az, \tag{1}$$

这里 A 是一个非零复常数且 $z \neq 0$，我们用如下指数形式表示 A 和 z

$$A = ae^{i\alpha}, \quad z = re^{i\theta}.$$

则

$$w = (ar)e^{i(\alpha+\theta)}. \tag{2}$$

由式(2)可知，映射(1)把 z 的半径 r 伸长或收缩了 $a = |A|$ 倍，并且 z 的辐角围绕原点旋转了 $\alpha = \arg A$. 因此，给定区域的像在几何图形上类似于原来的区域. 299

映射

$$w = z + B, \tag{3}$$

平移了向量 B，这里 B 是一个复常数. 即，如果

$$w = u + iv, \quad z = x + iy, \quad B = b_1 + ib_2,$$

则 z 平面上任何点(x, y)的像是 w 平面上的点

$$(u, v) = (x + b_1, y + b_2). \tag{4}$$

因为 z 平面上任何给定区域的每一点以这种方式映射成 w 平面上的点，所以其像区域在几何图形上类似于原来的区域.

一般地，(非常数)线性映射

$$w = Az + B \quad (A \neq 0), \tag{5}$$

是映射

$$Z = Az \quad (A \neq 0) \quad 和 \quad w = Z + B$$

的复合. 显然映射

$$Z = Az \quad (A \neq 0) \quad 和 \quad w = Z + B$$

是一个伸缩旋转和一个平移. 下面我们进一步解释。

例　映射

$$w = (1 + i)z + 2$$

把 z 平面上如图 104 所示的矩形区域映为 w 平面上的矩形区域. 写出映射

$$Z=(1+i)z \quad 和 \quad w=Z+2$$

的复合就可看出. 因为 $1+i=\sqrt{2}\exp(i\pi/4)$，第一个映射伸长了$\sqrt{2}$倍，角度旋转了 $\pi/4$，第二个映射向右平移了两个单位.

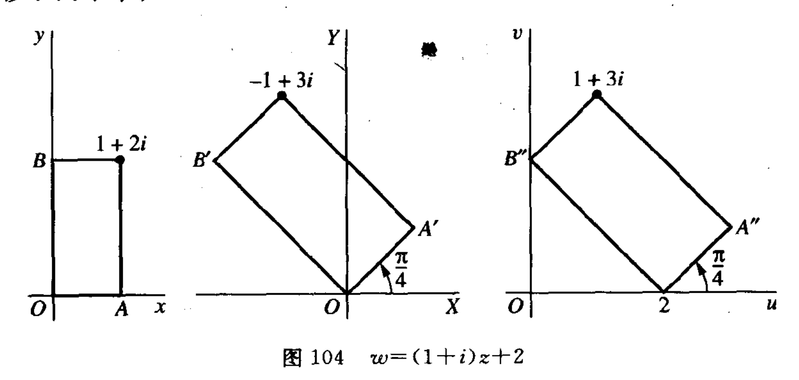


图 104 $w=(1+i)z+2$

练习

1. 说明为什么映射 $w=iz$ 是 z 平面上向量 z 旋转了$\frac{\pi}{2}$得到的向量? 求出无限带形区域 $0<x<1$ 的像集.

答案：$0<v<1$.

2. 证明映射 $w=iz+i$ 把半平面 $x>0$ 映射为半平面 $v>0$.

3. 用(a)极坐标；(b)直角坐标求出映射

$$w=(1+i)z$$

把半平面 $y>0$ 映成的区域，并画出该区域.

答案：$v>u$.

4. 求出半平面 $y>1$ 在映射 $w=(1-i)z$ 下的像.

5. 求出半无限带形 $x>0$，$0<y<2$ 在映射 $w=iz+1$ 下的像，并画出带形和像所在的区域.

答案：$-1<u<1$， $v<0$.

6. 画出 $w=A(z+B)$的几何图形，这里 A、B 是复常数，且 $A\neq 0$.

84 映射 $w=1/z$

方程

$$w=\frac{1}{z} \tag{1}$$

把w平面和z平面上的非零点一一地对应起来. 因为$z\bar{z}=|z|^2$,所以映射可由连续

映射

$$Z = \frac{1}{|z|^2}z, \quad w = \overline{Z} \tag{2}$$

300 ~ 301

来描述.

第一个映射是单位圆 $|z|=1$ 的逆映射. 也就是说，非零点 z 的像是满足

$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad 和 \quad \arg Z = \arg z$$

的点 Z. 因此圆周 $|z|=1$ 外面的点映成圆周 $|z|=1$ 内的非零点(如图 105)，反之亦然. 圆 $|z|=1$ 上的任意点映成它自身. (2)式的第二个映射是一个简单的实轴上的反射.

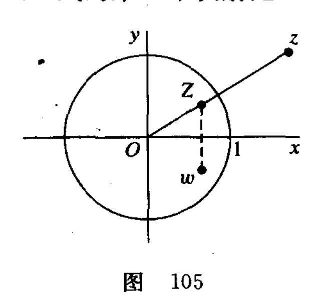


图 105

如果把映射(1)写成:

$$T(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0), \tag{3}$$

就可以在原点和无穷远点定义 T，使得 T 在扩充复平面上连续. 为此，我们只需参阅第 16 节，有

$$\lim_{z\to 0} T(z) = \infty \quad 因为 \quad \lim_{z\to 0}\frac{1}{T(z)} = 0 \tag{4}$$

和

$$\lim_{z\to\infty} T(z) = 0 \quad 因为 \quad \lim_{z\to 0} T\left(\frac{1}{z}\right) = 0. \tag{5}$$

为了让 T 在扩充复平面上连续，且保持 z 的值不变，记作

$$T(0) = \infty, \quad T(\infty) = 0 \quad 和 \quad T(z) = \frac{1}{z}. \tag{6}$$

更精确地，(6)式和(4)、(5)式的第一个极限表明，对扩充复平面上的每一点 z_0，包括 $z_0=0$ 和 $z_0=\infty$，有

$$\lim_{z\to z_0} T(z) = T(z_0) \tag{7}$$

T 在扩充复平面上处处连续就是(7)式的结论(见第 17 节). 由于连续性，无论何时，当讨论的函数$\frac{1}{z}$涉及无穷远点时，$T(z)$都是默认的. 302

85 映射 $1/z$

点 $w=u+iv$ 是非零点 $z=x+iy$ 在映射 $w=1/z$ 下的像点，记 $w=\bar{z}/|z|^2$，则

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}. \tag{1}$$

并且，因为 $z=1/w=\bar{w}/|w|^2$，所以有

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}. \tag{2}$$

下面基于两个极坐标的这一关系的讨论表明：映射 $w=1/z$ 把圆和直线仍然映成圆和直线．当 A、B、C、D 是满足条件 $B^2+C^2>4AD$ 的所有实数时，方程

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \tag{3}$$

是任意的圆或直线，若方程表示圆，$A\neq 0$；若方程表示直线，$A=0$．当 $A\neq 0$ 时，显然要求条件 $B^2+C^2>4AD$．如果用完全平方的方法，(3)式重写为

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{B^2+C^2-4AD}}{2A}\right)^2.$$

当 $A=0$ 时，条件变成 $B^2+C^2>0$，这意味着 B 和 C 不同时为零．回到楷体部分的证明，我们看到，如果 x，y 满足(3)式，我们可以用(2)式代替这些变量．化简后，u 和 v 满足(也可参见下面的练习 14)

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0, \tag{4}$$

这表示一个圆或一条直线．反之，如果 u 和 v 满足(4)式，由关系式(1)可知 x，y 满足(3)式．

由(3)式和(4)式知

(i) z 平面上不经过原点($D\neq 0$)的圆($A\neq 0$)映成 w 平面上不经过原点的圆；

303

(ii) z 平面上经过原点($D=0$)的圆($A\neq 0$)映成 w 平面上不经过原点的直线；

(iii) z 平面上不经过原点($D\neq 0$)的直线($A=0$)映成 w 平面上经过原点的圆；

(iv) z 平面上经过原点($D=0$)的直线($A=0$)映成 w 平面上经过原点的直线．

例 1 由(3)式和(4)式，垂线 $x=c_1(c_1\neq 0)$ 由映射 $w=1/z$ 映成圆 $-c_1(u^2+v^2)+u=0$，或

$$\left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2, \tag{5}$$

圆(5)的圆心在 u 轴上且同 v 轴相切．由(1)式，直线上的点 (c_1, y) 的像为

$$(u,v)=\left(\frac{c_1}{c_1{}^2+y^2},\frac{-y}{c_1{}^2+y^2}\right).$$

如果 $c_1>0$，圆(5)的圆心显然位于 v 轴的右侧．因为点 (c_1, y) 在整条直线上移动，所以它的像沿逆时针方向跑遍整个圆，扩充 z 平面上的无穷远点对应 w 平面上的原点．因为如果 $y<0$，那么 $v>0$；并且当 y 从负值增加到 0 时，u 从 0 增加到 $1/c_1$．当 y 沿正值增加时，v 是负的，u 减少到 0.

另一方面，如果 $c_1<0$，圆位于 v 轴的左侧．当点(c_1, y)向上移动时，它的像仍然跑遍整个圆，但为逆时针方向．见图 106，说明了 $c_1=1/3$ 和 $c_1=-1/2$ 的情形．

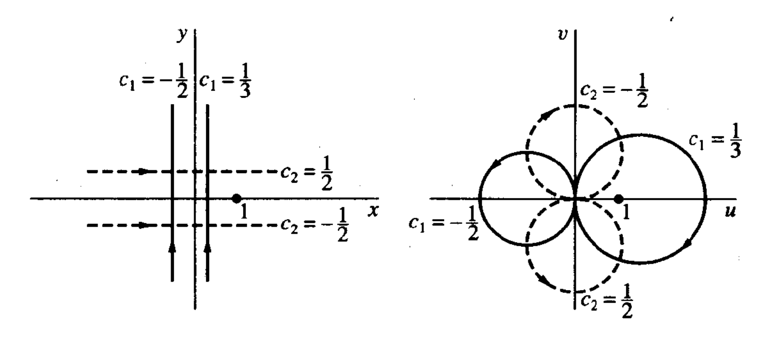


图 106　$w=1/z$

例 2　映射 $w=1/z$ 把平行线 $y=c_2(c_2\neq 0)$映为圆

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2c_2}\right)^2=\left(\frac{1}{2c_2}\right)^2, \tag{6}$$

304

这个圆的中心在 v 轴上并同 u 轴相切．在图 106 中有两种特殊情形，相应的直线和圆的方向也已给出．

例 3　当 $w=1/z$ 时，半平面 $x\geqslant c_1(c_1>0)$映成圆

$$\left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2\leqslant\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2. \tag{7}$$

这是因为，由例 1，任何直线 $x=c(c\geqslant c_1)$映成圆

$$\left(u-\frac{1}{2c}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{2c}\right)^2. \tag{8}$$

并且当 c 以大于 c_1 的值增加时，直线 $x=c$ 向右移动到直线 $x=c_1$ 的右侧，它的像圆(8)的半径收缩(见图 107.)因为直线 $x=c$ 经过半平面 $x\geqslant c_1$ 中的所有点，并且圆(8)经过圆盘(7)中的所有点，所以映射成立．

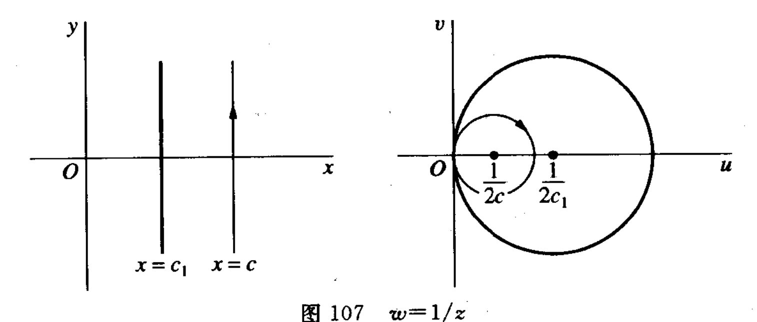


图 107　$w=1/z$

练习

1. 在第 85 节中，由(2)式的第一个式子指出，当 $w=1/z$ 时，不等式 $x\geqslant c_1\,(c_1>0)$ 成立当且仅当不等式(7)成立. 由此给出第 85 节例 3 中映射的可供选择的证明.

2. 证明当 $c_1<0$ 时，半平面 $x<c_1$ 在映射 $w=1/z$ 下的像是一个圆的内部. 当 $c_1=0$ 时它的像是什么?

3. 设 $c_2>0$ 时，证明半平面 $y>c_2$ 在映射 $w=1/z$ 下的像是一个圆的内部. 当 $c_2=0$ 时它的像是什么?

4. 求出无穷带形 $0<y<1/(2c)$ 在映射 $w=1/z$ 下的像. 画出带形和它的像.

305

答案：$u^2+(v+c)^2>c^2$，$v<0$.

5. 求出第一象限 $x>1$，$y>0$ 在映射 $w=1/z$ 下的像.

答案：$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$v<0$.

6. 证明附录 B(a)中图 4 和(b)中图 5 所示的区域和边界部分的映射，这里 $w=1/z$.

7. 从几何上描述映射 $w=1/(z-1)$.

8. 从几何上描述映射 $w=i/z$. 并说明为什么它把直线和圆映成直线和圆.

9. 求出当 $w=i/z$ 时半无穷带形 $x>0$，$0<y<1$ 的像. 并画出这个带形和它的像.

答案：$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$u>0$，$v>0$.

10. 记 $w=\rho\exp(i\phi)$，证明映射 $w=1/z$ 把双曲线 $x^2-y^2=1$ 映成双纽线 $\rho^2=\cos 2\phi$(见第 5 节中练习 15).

11. 令圆 $|z|=1$ 有顺时针或逆时针方向. 求其像在映射 $w=1/z$ 下的方向.

12. 证明在映射 $w=1/z$ 下当圆映成圆时，原来的圆心却没有映成其像的圆心.

13. 用 z 的指数式 $z=re^{i\theta}$ 证明映射

$$w=z+\frac{1}{z},$$

把圆 $r=r_0$ 映成参数表示的椭圆

$$u=\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)\cos\theta,\quad v=\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)\sin\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

这里，映射 $w=z+\frac{1}{z}$ 是恒等映射与第 84 节和第 85 节所讨论的映射的和.

14. (a)把第 85 节中方程(3)写成如下形式

$$2Az\bar{z}+(B-Ci)z+(B+Ci)\bar{z}+2D=0,$$

这里，$z=x+iy$.

(b)证明当 $w=1/z$ 时，(a)的结果变成

$$2Dw\bar{w}+(B+Ci)w+(B-Ci)\bar{w}+2A=0.$$

然后证明如果 $w=u+iv$，方程等同于第 85 节中的(4)式.

提示：在(a)中用关系式(见第 5 节)

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad 和 \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

306

86 分式线性映射

映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0) \tag{1}$$

叫做分式线性映射，或者叫做 Möbius 映射，这里 a，b，c，d 是复常数．我们看到方程(1)可以写成如下形式

$$Azw+Bz+Cw+D=0 \quad (AD-BC\neq 0); \tag{2}$$

反之，任何形如(2)式的方程也都可以写成形式(1)．因为两种形式的方程关于 z 是线性的，关于 w 也是线性的，并且关于 z 和 w 是双线性的，所以分式线性映射也叫做双线性映射．

当 $c=0$ 时，方程(1)的条件 $ad-bc\neq 0$ 变为 $ad\neq 0$；我们看到由此映射得到一个非常数线性函数．当 $c\neq 0$ 时，方程(1)可以写成

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0). \tag{3}$$

所以，条件 $ad-bc\neq 0$ 保证得到的不是一个常函数．映射 $w=1/z$ 显然是映射(1)当 $c\neq 0$ 时的特殊情形．

方程(3)表明，当 $c\neq 0$ 时，分式线性映射由下面的映射组成：

$$Z=cz+d, \quad W=1/Z, \quad w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}W \quad (ad-bc\neq 0).$$

由此得出，不论 c 是否为零，任何分式线性映射都把圆和直线映成圆和直线．因为这些特殊的分式线性映射都把圆和直线映成了圆和直线(见第 83 节和第 85 节)．

解方程(1)求得 z 值为

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a} \quad (ad-bc\neq 0). \tag{4}$$

当给定点 w 是给定点 z 在映射(1)下的像时，点 z 可以由方程(4)得到．如果 $c=0$，因为 a 和 b 都不等于零，w 平面内的每一点显然是 z 平面内唯一一点的像．如果 $c\neq 0$，在 $w\neq a/c$ 时有同样的结论．因为如果 $w=a/c$，那么方程(4)中分式线性映射的分母是零．为了在扩充 z 平面上定义分式线性映射 T，使得点 $w=a/c$ 是 $c\neq 0$ 时点 $z=\infty$ 的像点，可以扩大映射(1)的定义域．首先记

307

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0). \tag{5}$$

然后记

$$T(\infty)=\infty, \quad 如果\ c=0$$

和

$$T(\infty)=\frac{a}{c}\quad 和 \quad T\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty,\quad 如果\ c\neq 0$$

回顾第 17 节中的练习 11，我们知道 T 在扩充 z 平面上是连续的. 我们也可以在第 84 节中扩大映射 $w=1/z$ 的定义域得到这一结果.

当扩大定义域后，分式线性映射(5)就是从扩充 z 平面到扩充 w 平面上的到上的一一映射. 也就是说，当 $z_1\neq z_2$ 时，必有 $T(z_1)\neq T(z_2)$；并且对于扩充 w 平面上的每一点 w，都存在扩充 z 平面上的点 z，使得 $T(z)=w$. 所以对于映射 T，存在逆映射 T^{-1}，在扩充 w 平面上如下定义：

$$T^{-1}(w)=z\quad 当且仅当\quad T(z)=w.$$

由方程(4)，我们看到

$$T^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}\quad (ad-bc\neq 0).\tag{6}$$

显然，T^{-1}本身是一个分式线性映射，这里

$$T^{-1}(\infty)=\infty,\quad 如果\quad c=0.$$

和

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)=\infty\quad 和\quad T^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c},\quad 如果\quad c\neq 0.$$

如果 T 和 S 是两个分式线性映射，那么它们的复合 $S[T(z)]$也是分式线性映射. 这可结合(5)式的表达式证明. 特别地，对于扩充 z 平面上的每一点 z，都有

$$T^{-1}[T(z)]=z.$$

总存在这样的分式线性映射，把给定的三个不同的点 z_1、z_2、z_3 映为不同的三点 w_1、w_2、w_3. 这将在第 87 节中证明. 这里 z 点在该映射下的像 w 由关于 z 的表达式清楚地给出. 这里我们要讲述的是一个更直接的寻找所求映射的方法.

308

例 1　求一个把点

$$z_1=-1,\quad z_2=0,\quad z_3=1$$

映为点

$$w_1=-i,\quad w_2=1,\quad w_3=i$$

的分式线性映射. 因为 1 是 0 的像，由表达式(1)可知，$1=b/d$ 或者 $d=b$. 因此

$$w=\frac{az+b}{cz+b}\quad [b(a-c)\neq 0].\tag{7}$$

因为-1 和 1 分别映为$-i$ 和 i，所以有

$$ic-ib=-a+b\quad 和\quad ic+ib=a+b.$$

把方程两边相对应，有 $c=-ib$；两式相减，有 $a=ib$. 所以

$$w=\frac{ibz+b}{-ibz+b}=\frac{b(iz+1)}{b(-iz+1)}.$$

因为 b 是任意的并且非零，所以可以取 b 为单位 1(或者把它约掉)，写作

$$w=\frac{iz+1}{-iz+1}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i-z}{i+z}.$$

例 2 假设点

$$z_1=1,\quad z_2=0,\quad z_3=-1$$

映为点

$$w_1=i,\quad w_2=\infty,\quad w_3=1.$$

因为 $w_2=\infty$ 对应点 $z_2=0$，所以在表达式(1)中，$d=0$；所以

$$w=\frac{az+b}{cz}\quad(bc\neq 0). \tag{8}$$

因为 1 映为 i，-1 映为 1，我们有

$$ic=a+b\quad 和\quad -c=-a+b;$$

从而有

$$b=\frac{i-1}{2}c,\quad a=\frac{i+1}{2}c.$$

309

最后，如果令 $c=2$，(8)式变为

$$w=\frac{(i+1)z+(i-1)}{2z}.$$

87 一种隐含形式

方程

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{1}$$

(隐式地)定义了一个把有限 z 平面上的相异点 z_1、z_2、z_3 分别映为有限 w 平面上的相异点 w_1、w_2、w_3 的分式线性映射[⊖]. 为了证明这一结论，我们把(1)式写作

$$(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3)=(z-z_1)(w-w_3)(z_2-z_3)(w_2-w_1). \tag{2}$$

如果 $z=z_1$，(2)式的右侧为 0；所以有 $w=w_1$. 类似地，如果 $z=z_3$，(2)式的左侧为 0，从而 $w=w_3$. 如果 $z=z_2$，那么有线性方程

$$(w-w_1)(w_2-w_3)=(w-w_3)(w_2-w_1),$$

其唯一解为 $w=w_2$. 我们看到，由(1)式定义的映射实际上是一个扩张(2)式的乘积而得到的分式线性映射. 把结果写成如下形式(86 节)

$$Azw+Bz+Cw+D=0. \tag{3}$$

⊖ (1)式的两侧是交比，在许多书中关于分式线性映射的更广泛的发展中占有很重要的地位。如：可参见 R. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis*, pp. 192-196, 1993. 或 J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, 2d ed., 6th printing, pp. 48-55, 1997.

(3)式所需要的条件 $AD-BC\neq0$ 显然满足. 因为，如刚才所证明的那样，(1)式并没有定义一个常函数. (1)式定义了一个把点 z_1、z_2、z_3 分别映为点 w_1、w_2、w_3 的唯一的分式线性映射，证明留给读者(练习 10).

例 1 在 86 节例 1 中所求的映射要求

310

$$z_1=-1,\quad z_2=0,\quad z_3=1\quad \text{和}\quad w_1=-i,\quad w_2=1,\quad w_3=i.$$

把(1)式写成

$$\frac{(w+i)(1-i)}{(w-i)(1+i)}=\frac{(z+1)(0-1)}{(z-1)(0+1)},$$

则得到由 z 表示的解 w，较易得到映射

$$w=\frac{i-z}{i+z}.$$

如果适当的修改方程(1)，也可以应用到无穷远点是(扩充)z 平面或 w 平面中所描述点之一的情况. 例如，假设 $z_1=\infty$，因为在扩充 z 平面上任何分式线性映射是连续的，我们只需在方程(1)的右侧用$\dfrac{1}{z_1}$代替 z_1，令 z_1 趋于 0：

$$\lim_{z_1\to0}\frac{(z-1/z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-1/z_1)}\cdot\frac{z_1}{z_1}=\lim_{z_1\to0}\frac{(z_1z-1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_1z_2-1)}=\frac{z_2-z_3}{z-z_3},$$

则我们所要的方程(1)的修正形式为

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{z_2-z_3}{z-z_3}.$$

注意到这个修正只是在方程(1)中简单删除掉涉及到 z_1 的因子而正常得到的. 易知，当任何其他所描述点是∞时同样可以应用.

例 2 在 86 节例 2 中所描述的点为

$$z_1=1,\quad z_2=0,\quad z_3=-1\quad \text{和}\quad w_1=i,\quad w_2=\infty,\quad w_3=1.$$

在这种情况下，我们用方程(1)的修正方程

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

有

$$\frac{w-i}{w-1}=\frac{(z-1)(0+1)}{(z+1)(0-1)}.$$

解出 w，我们得到了所求的映射

311

$$w=\frac{(i+1)z+(i-1)}{2z}.$$

练习

1. 求把点 $z_1=2$，$z_2=i$，$z_3=-2$ 分别映成点 $w_1=1$，$w_2=i$，$w_3=-1$ 的分式线性映射.

答案：$w=(3z+2i)/(iz+6)$.

2. 求把点 $z_1=-i$，$z_2=0$，$z_3=i$ 映成点 $w_1=-1$，$w_2=i$，$w_3=1$ 的分式线性映射．虚轴 $x=0$ 映成了什么曲线？

3. 求把点 $z_1=\infty$，$z_2=i$，$z_3=0$ 映成点 $w_1=0$，$w_2=i$，$w_3=\infty$ 的双线性映射．

答案：$w=-1/z$.

4. 求出把点 z_1，z_2，z_3 映成点 $w_1=0$，$w_2=1$，$w_3=\infty$ 的双线性映射．

答案：$w=\dfrac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$.

5. 证明两个分式线性映射的复合仍是分式线性映射，如第 86 节所述．

6. 映射 $w=f(z)$ 的不动点 z_0 是指满足 $f(z_0)=z_0$ 的点．证明每一分式线性映射除恒等映射 $w=z$ 外在扩充复平面上至多有两个不动点．

7. 求下列映射的不动点（见练习 6）

(a) $w=\dfrac{(z-1)}{z+1}$； (b) $w=\dfrac{6z-9}{z}$.

答案：(a) $z=\pm i$； (b) $z=3$.

8. 修正第 87 节中的方程(1)，z_2 和 w_2 都是无穷远点．证明任何分式线性映射的不动点（练习 6）是 0 和 ∞ 时，必有形式 $w=az(a\neq 0)$.

9. 证明如果原点是一个分式线性映射的不动点（练习 6），那么该映射可写成 $w=z/(cz+d)$，这里 $d\neq 0$.

10. 证明仅存在一个分式线性映射，把给定的扩充 z 平面上的三个不同点 z_1，z_2，z_3 分别映为扩充 w 平面上的三个不同点 w_1，w_2，w_3.

提示：令 T 和 S 是两个这样的分式线性映射．然后说明为什么 $S^{-1}[T(z_k)]=z_k(k=1,2,3)$，用练习 5 和 6 的结果证明对所有的 z，有 $S^{-1}[T(z)]=z$，这就证明了对所有的 z，有 $T(z)=S(z)$.

11. 借助于第 87 节的方程(1)证明，如果一个分式线性映射把 x 轴上的点映到 u 轴上，那么映射的系数除可能的复常数因子外都是实的．逆命题显然成立．

12. 令 $T(z)=(az+b)/(cz+d)$ 是除 $T(z)=z$ 外的任一个分式线性映射，这里 $ad-bc\neq 0$．证明 $T^{-1}=T$ 当且仅当 $d=-a$.

312

提示：把方程 $T^{-1}(z)=T(z)$ 写成

$$(a+d)[cz^2+(d-a)z-b]=0.$$

88 上半平面的映射

我们求出所有把上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映成开圆盘 $|w|<1$ 并且把上半平面的边界 $\operatorname{Im}z=0$ 映成单位圆的边界 $|w|=1$（图 108）的分式线性映射．

为了把直线 $\operatorname{Im}z=0$ 上的点映为圆 $|w|=1$ 上的点，首先在该直线上选择点 $z=0$，$z=1$，$z=\infty$，让这些点在分式线性映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0) \tag{1}$$

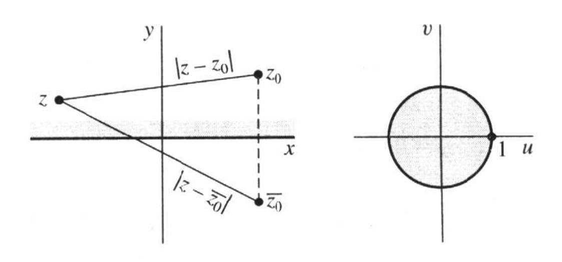


图 108 $w=e^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ $(\operatorname{Im} z_0>0)$

下的像的模为 1.

由方程(1)可知，当 $z=0$ 时，如果 $|w|=1$，则 $|b/d|=1$；即

$$|b|=|d|\neq 0. \tag{2}$$

由第 86 节，点 $z=\infty$ 的像 w 是一个有限数，即 $w=a/c$，仅当 $c\neq 0$ 时. 所以当 $z=\infty$ 时要求的 $|w|=1$ 即指 $|a/c|=1$，或者

$$|a|=|c|\neq 0; \tag{3}$$

因为 a 和 c 是非零的，所以方程(1)可写成

$$w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z+(b/a)}{z+(d/c)}. \tag{4}$$

因为 $|a/c|=1$，并且

313

$$\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{d}{c}\right|\neq 0.$$

由(2)式和(3)式，方程(4)可写成如下形式

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_1}\quad(|z_1|=|z_0|\neq 0), \tag{5}$$

这里 α 是一个实常数且 z_0 和 z_1 是(非零的)复常数.

下面我们给映射(5)加上条件：当 $z=1$ 时有 $|w|=1$. 所以有

$$|1-z_1|=|1-z_0|,$$

或者

$$(1-z_1)(1-\overline{z_1})=(1-z_0)(1-\overline{z_0}).$$

但因为 $|z_1|=|z_0|$，所以 $z_1\overline{z_1}=z_0\overline{z_0}$，并且由上面的关系式可知

$$z_1+\overline{z_1}=z_0+\overline{z_0};$$

即，$\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_0$. 同样也可以得到

$$z_1=z_0\quad 或\quad z_1=\overline{z_0},$$

因为 $|z_1|=|z_0|$. 如果 $z_1=z_0$，那么映射(5)就是常函数 $w=\exp(i\alpha)$；这里 $z_1=\overline{z_0}$.

当 $z_1=\overline{z_0}$时，映射(5)把点 z_0 映成原点 $w=0$；因为圆 $|w|=1$ 内部的点是 z 平面中实轴

以上的点的像点，故有 $\mathrm{Im}z_0>0$. 所以任何一个有本节第一段所述的映射性质的分式线性映射都有形式

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\quad(\mathrm{Im}z_0>0),\tag{6}$$

这里 α 是实数.

反之，下面要证明的是任何形如(6)式的分式线性映射都有我们想要的映射性质. 这可以对方程(6)的两侧取绝对值而得到并从几何上解释了下面的方程

$$|w|=\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|,$$

如果点 z 位于上半平面，z 和 z_0 两点都位于实轴的同一侧，并且实轴是连接 z 和 $\overline{z_0}$ 的线段的垂直平分线，则可知距离 $|z-z_0|$ 小于距离 $|z-\overline{z_0}|$（图 108）；也就是说 $|w|<1$. 否则，如果 z 位于实轴的下方，则距离 $|z-z_0|$ 大于距离 $|z-\overline{z_0}|$，所以 $|w|>1$. 最后，如果 z 位于实轴上，因为 $|w|=1$，则 $|z-z_0|=|z-\overline{z_0}|$. 因为任何分式线性映射都是从扩充 z 平面到扩充 w 平面的一一映射，这表明映射(6)把平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映到圆盘 $|w|<1$ 并且把上半平面的边界映为圆盘的边界. [314]

我们的第一个例子阐明了上面楷体部分结果的应用.

例 1 在第 86 节和第 87 节的例 1 中，映射

$$w=\frac{i-z}{i+z}\tag{7}$$

可以写成

$$w=e^{i\pi}\frac{z-i}{z-\overline{i}}.$$

因此具有楷体部分所描述的映射性质（也可参见附录 B 中的图 13，指出了相应的边界点）.

上半平面 $\mathrm{Im}z\geqslant0$ 在其他类型的分式线性映射下的像，通过检查问题中的特殊映射是较容易得到的.

例 2 记 $z=x+iy$ 和 $w=u+iv$，容易证明映射

$$w=\frac{z-1}{z+1}\tag{8}$$

把上半平面 $y>0$ 映到上半平面 $v>0$ 并且把 x 轴映到 u 轴. 首先我们注意到，当 z 是实数时，w 也是实数. 因为实轴 $y=0$ 的像或者是一个圆，或者是一条直线，所以实轴 $y=0$ 的像一定是实轴 $v=0$. 并且对任何有限 w 平面上的点 w，

$$v=\mathrm{Im}w=\mathrm{Im}\frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{(z+1)\overline{(z+1)}}=\frac{2y}{|z+1|^2}\quad(z\neq-1).$$

所以数 y 和 v 有相同的符号，这意味着位于 x 轴上方的点对应位于 u 轴上方的点且位于 x 轴下方的点对应位于 u 轴下方的点. 最后由于 x 轴上的点对应 u 轴上的点，并且分式线性映射是一个从扩充平面到扩充平面的一一映射（见第 86 节），上面所述的映射(8)满足映射性质.

我们的最后一个例子是关于复合函数，应用例 2 中讨论的映射.

例 3 映射

315

$$w = \mathrm{Log}\,\frac{z-1}{z+1} \tag{9}$$

是函数

$$Z = \frac{z-1}{z+1} \quad 和 \quad w = \mathrm{Log}Z \tag{10}$$

的复合. 这里取的是对数函数的主值支.

从例 2 可知，(10)的第一个映射把上半平面 $y>0$ 映成上半平面 $Y>0$，这里 $z=x+iy$，$Z=X+iY$. 并且从图 109 易知，(10)的第二个映射把上半平面 $Y>0$ 映成带形 $0<v<\pi$，这里 $w=u+iv$. 更清楚地，记 $Z=R\exp(i\Theta)$和

$$\mathrm{Log}Z = \ln R + i\Theta \quad (R>0, -\pi<\Theta<\pi),$$

我们看到，当一点 $Z=R\exp(i\Theta_0)$ $(0<\Theta_0<\pi)$从原点沿直线 $\Theta=\Theta_0$ 向外移动时，它的像是 w 平面上成直角坐标的点$(\ln R, \Theta_0)$. 显然像沿整条平行线 $v=\Theta_0$ 向右移动. 因为当 Θ_0 在 $\Theta_0=0$ 和 $\Theta_0=\pi$ 之间移动时，这些直线位于带形 $0<v<\pi$ 内，事实上从上半平面 $Y>0$ 到这个带形的映射是一一的.

由此表明，由映射(10)组成的复合映射(9)把平面 $y>0$ 映到带形 $0<v<\pi$. 相映的边界点在附录 B 的图 19 中.

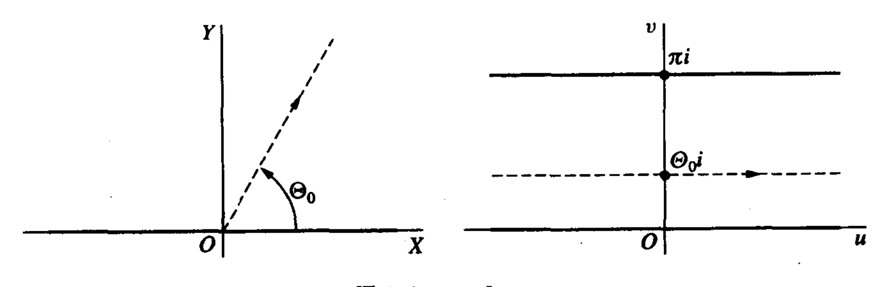


图 109 $w=\mathrm{Log}z$

练习

1. 在第 88 节的例 1 中，映射

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

把半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映到单位圆 $|w|<1$，并且把半平面的边界映成单位圆的边界. 通过证明 x 轴上的一段映成了图中所示部分来证明点 $z=x$ 映成点

316

$$w = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\,\frac{2x}{1+x^2},$$

并完成附录 B 中图 13 的映射的证明.

2. 证明附录 B 中图 12 所示的映射，这里

$$w=\frac{z-1}{z+1}.$$

提示：把给定的映射写成映射

$$Z=iz,\quad W=\frac{i-Z}{i+Z},\quad w=-W.$$

的复合，参考练习 1 中所证明的映射.

3. (a)求映射

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

的逆映射并应用附录 B 中图 13 所示的映射(已在练习 1 中证明)证明映射

$$w=i\,\frac{1-z}{1+z}$$

把圆盘 $|z|\leqslant 1$ 映成半平面 $\operatorname{Im}w\geqslant 0$.

(b)证明分式线性映射

$$w=\frac{z-2}{z}$$

可以写成

$$Z=z-1,\quad W=i\,\frac{1-Z}{1+Z},\quad w=iW.$$

应用(a)的结果证明该映射把圆盘 $|z-1|\leqslant 1$ 映成左半平面 $\operatorname{Re}w\leqslant 0$.

4. 第 88 节的映射(6)把点 $z=\infty$ 映成位于圆盘 $|w|\leqslant 1$ 的边界上的点 $w=\exp(i\alpha)$. 证明如果 $0<\alpha<2\pi$ 且分别把点 $z=0$ 和点 $z=1$ 映为点 $w=1$ 和点 $w=\exp\, i\alpha/2$，则该映射可以写成

$$w=e^{i\alpha}\,\frac{z+\exp(-i\alpha/2)}{z+\exp(i\alpha/2)}.$$

5. 注意到当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，练习 4 中的映射变成

$$w=\frac{iz+\exp(i\pi/4)}{z+\exp(i\pi/4)}.$$

证明这一特殊情况把 x 轴上的点映成如图 110 所示的点. 317

6. 证明如果 $\operatorname{Im}z_0<0$，第 88 节中的映射(6)把下半平面 $\operatorname{Im}z\leqslant 0$ 映到单位圆盘 $|w|\leqslant 1$.

7. 方程 $w=\log(z-1)$ 可以写成

$$Z=z-1,\quad w=\log Z.$$

求 $\log Z$ 的一个分支，使得 x 轴上去掉 $x\geqslant 1$ 外的割破 z 平面由 $w=\log(z-1)$ 映成 w 平面上的带形 $0<v<2\pi$.

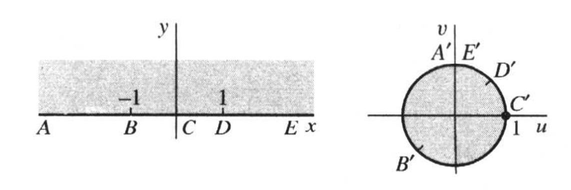


图 110 $w=\dfrac{iz+\exp(i\pi/4)}{z+\exp(i\pi/4)}$

89 映射 $w=\sin z$

因为(第 33 节)

$$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,$$

所以映射 $w=\sin z$ 可以写成

$$u = \sin x\cosh y, \quad v = \cos x\sinh y. \tag{1}$$

求原点在该映射下的像，一种方法是检查垂线 $x=c_1$ 的像．如果 $0<c_1<\frac{\pi}{2}$，那么直线 $x=c_1$ 上的点变成了曲线

$$u = \sin c_1\cosh y, \quad v = \cos c_1\sinh y \quad (-\infty < y < \infty), \tag{2}$$

上的点．曲线(2)是焦点为

$$w =\pm\sqrt{\sin^2 c_1 + \cos^2 c_1} =\pm 1.$$

的双曲线

$$\frac{u^2}{\sin^2 c_1} - \frac{v^2}{\cos^2 c_1} = 1 \tag{3}$$

的右分支．(2)的第二个方程表明，当点(c_1, y)沿整条直线向上移动时，它的像也沿整条双曲线的分支向上移动．直线和它的像如图 111 所示，这里相应的点已经标出．特别地，我们知道，存在一个一一映射把直线的上半段($y>0$)映为双曲线分支的上半部分($v>0$)．如果 $-\frac{\pi}{2}<c_1<0$，那么直线 $x=c_1$ 映为上半双曲线的左分支．如前所述，相应的点已在图 111 中标出．

318

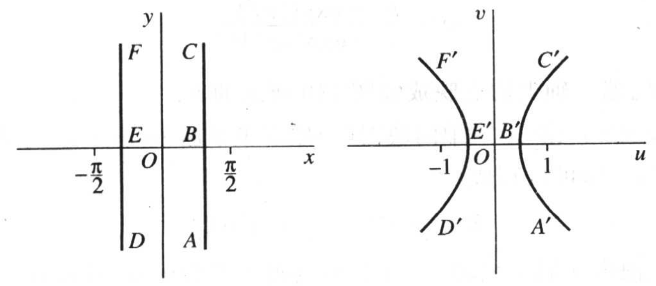


图 111 $w=\sin z$

我们需要考虑直线 $x=0$ 或 y 轴，由方程(1)，每一点 $(0, y)$ 的像是 $(0, \sinh y)$. 所以 y 轴一一地映为 v 轴，并且正 y 轴对应正 v 轴.

现在我们考虑如何应用这些观察得到一定区域的像.

例 1 这里我们证明 $w=\sin z$ 是一个把 z 平面上的半无穷带形 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 映为 w 平面中上半平面 $v\geqslant 0$ 的一一映射.

为此，我们首先证明带形的边界一一地映成 w 平面上的实轴，如图 112 所示. 线段 BA 的像在方程(1)中记作 $x=\frac{\pi}{2}$ 并且限定 y 非负. 因为当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$u=\cosh y$，$v=0$，BA 上的有代表性的点 $\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ 映为 w 平面上的点 $(\cosh y, 0)$；当 $\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ 沿 B 向上移动时，它的像必须从 B' 的右侧沿 u 轴移动. 平行线段 DB 上的点 $(x, 0)$ 有像 $(\sin x, 0)$，当 x 从 $x=-\frac{\pi}{2}$ 到 $x=\frac{\pi}{2}$ 增加或 $(x, 0)$ 从 D 移动到 B 时，其像 $(\sin x, 0)$ 从 D' 的右侧移动到 B'. 当线段 DE 上的点 $\left(-\frac{\pi}{2}, y\right)$ 沿 D 向上移动时，其像 $(-\cosh y, 0)$ 移动到 D' 的左侧.

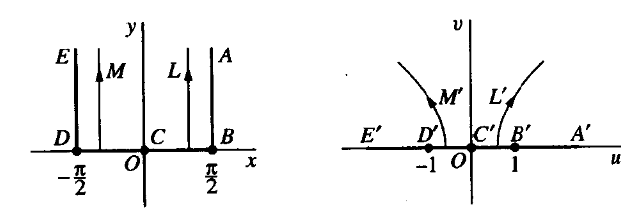


图 112 $w=\sin z$

带形 $-\pi/2<x<\pi/2$，$y>0$ 内的每一点都位于垂直半直线 $x=c_1$，$y>0(-\pi/2<c_1<\pi/2)$ 上，这已经在图 112 中证明过. 这些半直线的像是不同的，并且在整个半平面 $v>0$ 上是连续的. 如果直线 $x=c_1(0<c_1<\pi/2)$ 的上半段 L 看作沿正 y 轴的方向向左移动，包含了其像 L' 的双曲线的右分支开口变宽并且它的顶点 $(\sin c_1, 0)$ 趋向于原点 $w=0$. 因此 L' 趋向于变成正 v 轴. 我们在举例之前先看正 y 轴的像. 另一方面，当 L 靠近带形边界上的线段 BA 时，双曲线的分支靠近 u 轴上的线段 $B'A'$ 并且它的顶点 $(\sin c_1, 0)$ 趋向于点 $w=1$. 类似的讨论可以在图 112 中的半直线 M 和它的像 M' 上讨论. 可以得出结论，上半平面 $v>0$ 中的每一点恰是带形区域内部一点的像. [319]

映射 $w=\sin z$ 是将带形 $-\pi/2<x<\pi/2$，$y\geqslant 0$ 映成半平面 $v\geqslant 0$ 的一一映射. 最后的结果在附录 B 的图 9 中证明. 带形的右半部分显然映成了 w 平面的第一象限，如附录 B 中的图 10 所证明的那样.

当 $w=\sin z$ 时求出一定区域的像，另外一个方法是考虑平行线段 $y=c_2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的像，这里 $c_2>0$. 由方程(1)，这样一条线段的像是带有参数表示

$$u=\sin x\cosh c_2,\quad v=\cos x\sinh c_2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi). \tag{4}$$

的曲线. 容易看出，曲线是椭圆

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c_2}+\frac{v^2}{\sinh^2 c_2}=1, \tag{5}$$

其焦点是

$$w=\pm\sqrt{\cosh^2 c_2-\sinh^2 c_2}=\pm 1.$$

在图 113 中，点(x, c_2)的像从点 A 向右移动到点 E，沿逆时针方向围绕椭圆形成了一个闭回路. 注意到当正数 c_2 取更小的值时，椭圆就会变得更小，但焦点还是$(\pm1, 0)$. 在 $c_2=0$ 的情形，方程(4)变成

$$u=\sin x, \quad v=0 \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi);$$

我们发现 x 轴上的区间$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 映成了 u 轴上的区间$-1\leqslant u\leqslant 1$. 当 $c_2>0$ 时，该映射不是一对一的.

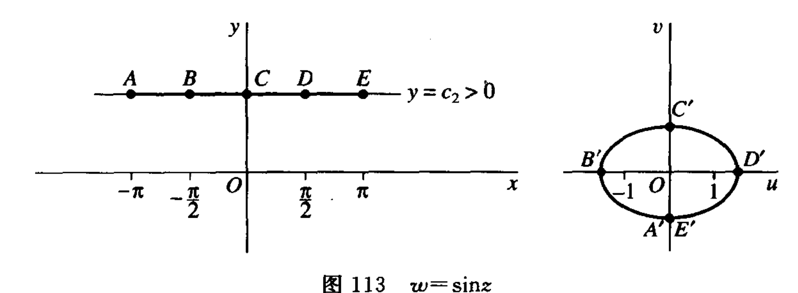


图 113　$w=\sin z$

下面的例子就依赖于这种评注.

例 2　在图 114 中，我们已经证明了矩形区域$-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$，$0\leqslant y\leqslant b$ 由映射 $w=\sin z$ 一一地映成了半椭圆区域，并且也指出了相应的边界点的映射. 因为如果 L 是一条线段 $y=c_2(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$，这里 $0<c_2\leqslant b$，它的像 L'是椭圆(5)的上半部分. 当 c_2 下降时，L 朝 x 轴向下移动，半椭圆 L'也向下移动并且趋近于变成从 $w=-1$ 到 $w=1$ 的线段 $E'F'A'$. 事实上，当 $c_2=0$ 时，方程(4)变成

$$u=\sin x, v=0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right);$$

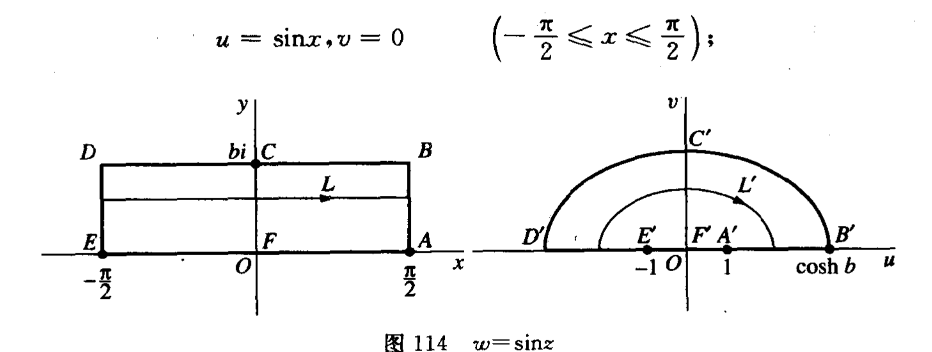


图 114　$w=\sin z$

显然这是一个从线段 EFA 到线段 $E'F'A'$ 的一一映射．任何在 w 平面的上半椭圆区域内的点仅仅是位于半椭圆上，或者位于极限情形 $E'F'A'$ 上，并且这一点恰恰是 z 平面上矩形区域内一点的像．我们就验证了这正是所求的映射，这一映射在附录 B 的图 11 中也有证明．

320～321

一旦由 sin 函数形成的映射已知，与 sin 函数联系紧密的其他各类函数的映射就较容易得到了．

例 3 由恒等式(第 33 节)

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

可知，映射 $w=\cos z$ 可连续地写为

$$Z = z + \frac{\pi}{2}, \quad w = \sin Z.$$

由此可知余弦映射就是向右平移了$\frac{\pi}{2}$个单位的正弦映射．

例 4 由第 34 节可知，映射 $w=\sinh z$ 可以写成 $w=-i\sin(iz)$，或者

$$Z = iz, \quad W = \sin Z, \quad w = -iW.$$

也就是说，映射 $w=\sinh z$ 是一个正弦映射和一个向右旋转一定角度的映射的复合．同样，映射 $w=\cosh z$ 是一个余弦映射，因为 $\cosh z=\cos(iz)$．

练习

1. 证明映射 $w=\sin z$ 将垂线 $x=c_1(-\pi/2<c_1<0)$ 的上半部分($y>0$)一一地映成第 89 节中双曲线(3)的左支的上半部分($v>0$)，如本节图 112 所述．

2. 证明在映射 $w=\sin z$ 下，直线 $x=c_1(\pi/2<c_1<\pi)$ 一一地映成第 89 节中双曲线(3)的右支．注意到是一一映射，并且直线的上半部分和下半部分分别被映为了分支的下半平面和上半平面．

3. 在第 89 节的例 1 中用垂直的半直线来证明映射 $w=\sin z$ 是将开区域 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，$y>0$ 映为半平面 $v>0$ 的一一映射．用水平线段 $y=c_2\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 来证明这一结果，这里 $c_2>0$．

4. (a)在映射 $w=\sin z$ 下，图 115 中的线段和弧 $D'E'$ 是矩形区域 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的边界线段的像．弧 $D'E'$ 是椭圆

$$\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$$

的四分之一．

(b)用水平线段的像来证明，映射 $w=\sin z$ 是区域 $ABCD$ 内的点和区域 $A'B'C'D'$ 内的点之间的一一映射，从而完成图 115 中所示的映射．

322

5. 证明映射 $w=\sin z$ 把位于 x 轴上方的矩形区域 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，$a\leqslant y\leqslant b$ 的内部映成一个椭圆环的内部，这个椭圆环沿负实轴上的线段 $-\sinh b\leqslant v\leqslant -\sinh a$ 有一割线，如图 116 所示．

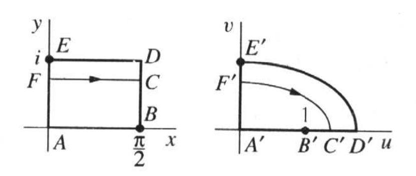


图 115 $w=\sin z$

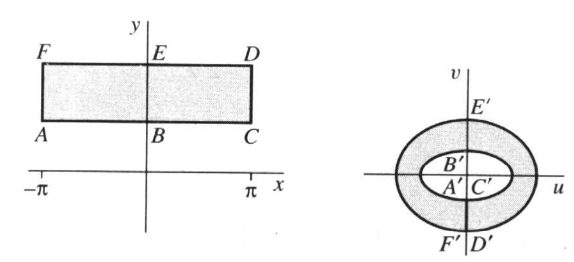


图 116 $w=\sin z$

注意到，当矩形区域内部的映射是一一映射时，其边界的映射不是一一的.

6. (a)证明方程 $w=\cosh z$ 可写成

$$Z = iz + \frac{\pi}{2}, \quad w = \sin Z.$$

(b)用(a)中的结果和附录 B 中图 10 的映射 $\sin z$ 证明映射 $w=\cosh z$ 把 z 平面上半无穷带形区域 $x\geqslant 0$，$0\leqslant y\leqslant \pi/2$ 映成 w 平面上的第一象限 $u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，并指出两个区域边界的相应部分.

7. 注意到映射 $w=\cosh z$ 可以写成映射

$$Z = e^z, \quad W = Z + \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{1}{2}W$$

的复合. 参考附录 B 的图 7 和图 16 证明映射 $w=\cosh z$ 把 z 平面上半无穷带形区域 $x\geqslant 0$，$0\leqslant y\leqslant \pi$ 映成 w 平面中的下半平面 $v\leqslant 0$，指出相应的边界部分.

8. (a)证明方程 $w=\sin z$ 可以写成

323

$$Z = i\left(z + \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \cosh Z, \quad w = -W.$$

(b)用本题(a)中的结果和练习 7，如附录 B 的图 9 所示，证明 $w=\cosh z$ 把半无穷带形区域 $-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$，$y\geqslant 0$ 映成半平面 $v\geqslant 0$(这一映射在第 89 节的例 1 中以不同的方法证明过).

90 z^2 和 $z^{1/2}$ 的分支定义的映射

在第 2 章中(见第 12 节)，我们考虑了关于映射 $w=z^2$ 的相当简单的映射，映射 $w=z^2$ 可写成

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \tag{1}$$

的形式. 下面我们给出一个更基础的例子，考察相关的映射 $w=z^{1/2}$，这里取平方根函数中一个特殊的分支.

例 1 我们用方程(1)来证明，图 117 中的垂直带形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$y\geqslant 0$ 的像是图中所示的闭半抛物形区域.

对于 $0<x_1<1$，当 y 沿 $y=0$ 递增时，点(x_1, y)向上移动形成一个垂直的半直线，在图 117 中记为 L_1. 由方程(1)，其像的迹在 uv 平面中有参数表达式：

$$u = x_1^2 - y^2, \quad v = 2x_1 y \quad (0 \leqslant y < \infty). \tag{2}$$

由第二个方程解出 y 代入第一个方程，像点(u, v)一定位于顶点为$(x_1^2, 0)$，焦点为原点的抛物线

$$v^2 = -4x_1^2(u - x_1^2) \tag{3}$$

上. 因为 v 关于 y 沿 $v=0$ 递增，由(2)的第二个方程，当点(x_1, y)沿直线 L_1 从 x 轴向上移动时，其像沿 u 轴向上移动到抛物线的上半部分 L'_1. 此外，当数 x_2 大于 x_1 但小于 1 时，相应的半直线 L_2 有像 L'_2，如图 117 所示，是位于 L'_1 右侧的半抛物线. 事实上，图中半直线 BA 的像是抛物线 $v^2=-4(u-1)$的上半部分，记为 $B'A'$.

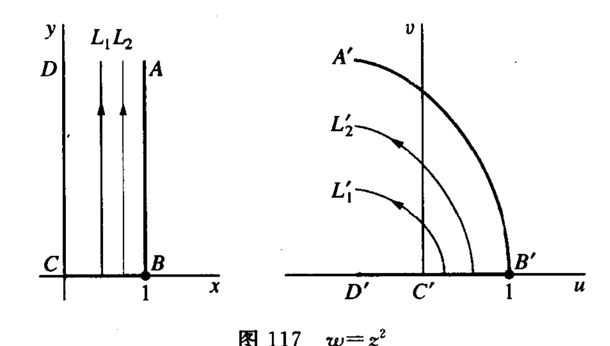


图 117 $w=z^2$

由方程(1)，根据 CD 上的点$(0, y)$映成 uv 平面上的点$(-y^2, 0)$，我们可以求出半直线 CD 的像，这里 $y\geqslant 0$. 所以，当一点沿 CD 从原点开始向上移动时，其像沿 u 轴从原点向左移动. 显然，当 xy 平面中的垂直半直线向左移动时，其在 uv 平面中的像半抛物线向下收缩变成半直线 $C'D'$.

显然，由 CD 和 BA 以及它们之间的半直线形成了以 $A'B'C'D'$为边界的闭半抛物型区域. 并且，该区域中的每一点都是以 $ABCD$ 为边界的闭带形区域中唯一一点的像点. 所以我们断言，半抛物形区域是带形区域的像，并且这两个闭区域之间存在一一映射(对比附录 B 中的图 3，这里带形区域的宽度可以改变).

对于映射 $z^{1/2}$的分支，由第 8 节，当 $z\neq 0$ 时，$z^{1/2}$的值是 z 的两个平方根. 由第 8 节，用极坐标表示

$$z = r\exp(i\Theta) \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leqslant \pi),$$

则

$$z^{1/2}=\sqrt{r}\exp\frac{i(\Theta+2k\pi)}{2}\quad(k=0,1),\tag{4}$$

当 $k=0$ 时为主根. 在第 31 节中，我们知道 $z^{1/2}$ 也可写成

$$z^{1/2}=\exp\left(\frac{1}{2}\log z\right)\quad(z\neq 0).\tag{5}$$

取 $\log z$ 的主值支就得到双值函数 $z^{1/2}$ 的主值支 $F_0(z)$，记为(第 32 节)

$$F_0(z)=\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}z\right)\quad(|z|>0,-\pi<\mathrm{Arg}z<\pi).$$

因为

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}z=\frac{1}{2}(\ln r+i\Theta)=\ln\sqrt{r}+\frac{i\Theta}{2}$$

324 ~ 325

所以当 $z=r\exp(i\Theta)$ 时

$$F_0(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\Theta}{2}\quad(r>0,-\pi<\Theta<\pi).\tag{6}$$

当 $k=0$ 且 $-\pi<\Theta<\pi$ 时，方程(6)的右侧同方程(4)的右侧相同. 原点和射线 $\Theta=\pi$ 形成了 $F_0(z)$ 的支割线，原点就是支点.

曲线和区域在映射 $w=F_0(z)$ 下的像为 $w=\rho\exp(i\phi)$，这里 $\rho=\sqrt{r}$ 且 $\phi=\Theta/2$. 显然此映射把辐角二等分，当 $z=0$ 时视为 $w=0$.

例 2 容易证明，$w=F_0(z)$ 是从四分之一圆 $0\leqslant r\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 到 w 平面上扇形 $0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2}$，$0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{4}$ 的一一映射(图 118). 为此，我们看到，当点 $z=r\exp(i\theta_1)(0\leqslant\theta_1\leqslant\pi/2)$ 从原点沿长度为 2 倾角为 θ_1 的半径 R_1 向外移动时，其像 $w=\sqrt{r}\exp(i\theta_1/2)$ 在 w 平面上从原点沿长度为 $\sqrt{2}$ 倾角为 $\theta_1/2$ 的半径 R'_1 向外移动. 如图 118，图中另一半径 R_2 和其像 R'_2 也是如此. 从图上显然可以得知，如果 z 平面上的区域除去从 DA 开始到 DC 结束的半径，则 w 平面上也相应地除去从 $D'A'$ 开始到 $D'C'$ 结束的半径. 这样就建立了两个区域点与点之间的一一对应.

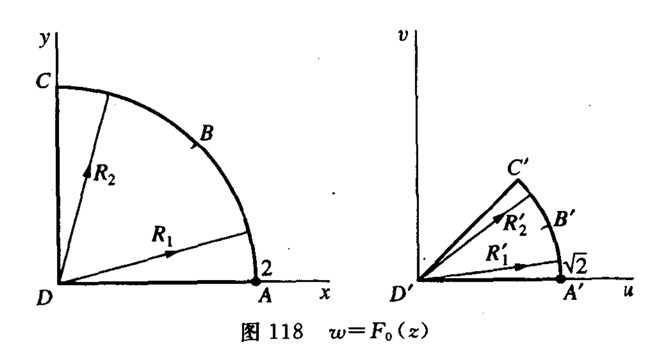


图 118 $w=F_0(z)$

例 3 映射 $w=F_0(\sin z)$ 可以写成

$$Z=\sin z,\quad w=F_0(Z)\quad (|Z|>0,\quad -\pi<\operatorname{Arg}Z<\pi).$$

如第 89 节中例 1 结尾所示，第一个映射把半无穷带形区域 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$y\geqslant 0$ 映成 Z 平面上的第一象限 $X\geqslant 0$，$Y\geqslant 0$. 第二个映射可理解为 $F_0(0)=0$ 把第一象限映成 w 平面上第一卦限. 这些连续的映射如图 119 所示，并且相应的边界点已经指出.

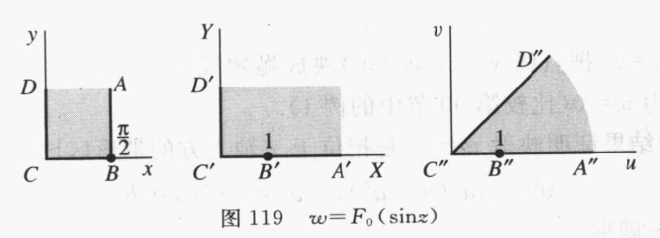


图 119 $w=F_0(\sin z)$

当 $-\pi<\Theta<\pi$ 时，由对数函数的分支

$$\log z=\ln r+i(\Theta+2\pi)$$

和方程(5)得到 $z^{1/2}$ 的分支

$$F_1(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i(\Theta+2\pi)}{2}\quad (r>0,-\pi<\Theta<\pi)\tag{7}$$

对应方程(4)中 $k=1$ 的情形. 因为 $\exp(i\pi)=-1$，所以 $F_1(z)=-F_0(z)$. 所以 $\pm F_0(z)$ 代表 $z^{1/2}$ 在区域 $r>0$，$-\pi<\Theta<\pi$ 中取到所有点的所有值. 如果由表达式(6)，延拓 F_0 的定义域到包含射线 $\Theta=\pi$，并记 $F_0(0)=0$，则 $\pm F_0(z)$ 代表整个 z 平面上 $z^{1/2}$ 取到的所有值.

在表达式(5)中由 $\log z$ 的另一分支得到 $z^{1/2}$ 的另一分支. 由射线 $\theta=\alpha$ 所确定的分支形成了由方程

$$f_\alpha(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2}\quad (r>0,\alpha<\theta<\alpha+2\pi)\tag{8}$$

给出的支割线. 我们看到，当 $\alpha=-\pi$ 时，有分支 $F_0(z)$，当 $\alpha=\pi$ 时，有分支 $F_1(z)$. 同 F_0 的情形一样，由表达式(8)，在支割线上的非零点定义 f_α，并记作 $f_\alpha(0)=0$，f_α 的定义域可以延拓到整个复平面. 这种延拓在整个复平面上是不连续的.

最后，假设 n 是任意的正整数，$n\geqslant 2$. $z^{1/n}$ 的值是 $z\neq 0$ 时 z 的 n 个根；由第 31 节，多值函数 $z^{1/n}$ 可以写成

$$z^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)=\sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta+2k\pi)}{n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1),\tag{9}$$

这里 $r=|z|$，$\Theta=\operatorname{Arg}z$. 我们已经考察过 $n=2$ 的情形. 一般情况下，对每一个 n，定义在区域 $r>0$，$-\pi<\Theta<\pi$ 上的函数

$$F_k(z)=\sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta+2k\pi)}{n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)\tag{10}$$

326~327

是 $z^{1/n}$ 的一个分支．当 $w=\rho e^{i\phi}$ 时，映射 $w=F_k(z)$ 是从其定义域到区域

$$\rho>0,\frac{(2k-1)\pi}{n}<\phi<\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

的一一映射．这些 $z^{1/n}$ 的 n 分支在区域 $r>0$，$-\pi<\Theta<\pi$ 内的任意点生成 z 的 n 个不同的 n 次方根．当 $k=0$ 时是主值支，并且容易得出形如(8)的更多分支．

练习

1．证明映射 $w=z^2$ 把直线 $y=c_2(c_2>0)$ 映成抛物线 $v^2=4c_2^2(u+c_2^2)$ 并指出相应的方向，所有抛物线的焦点为 $w=0$(比较第 90 节中的例 1)．

2．用练习 1 的结果证明映射 $w=z^2$ 是把位于 x 轴上方的带形区域 $a\leqslant y\leqslant b$ 映成两抛物线

$$v^2=4a^2(u+a^2),\quad v^2=4b^2(u+b^2).$$

之间的闭区域的一一映射．

3．根据第 90 节例 1，如附录 B 中的图 3 所示，指出映射 $w=z^2$ 是如何把任意宽的垂直带形区域 $0\leqslant x\leqslant c$，$y\geqslant 0$ 映成闭半抛物形区域的．

4．修改第 90 节例 1 的讨论，证明在映射 $w=z^2$ 下，由直线 $y=\pm x$，$x=1$ 形成的闭三角形的像是一个闭抛物形区域，该区域以 v 轴上线段 $-2\leqslant v\leqslant 2$ 为左侧边界，以抛物线 $v^2=-4(u-1)$ 的一部分为右侧边界．并证明图 120 中标出的两边界的相应点．

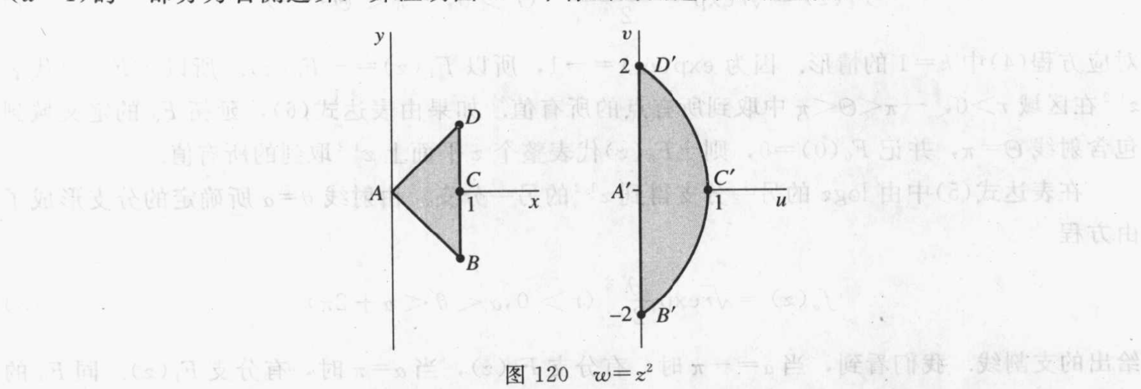


图 120 $w=z^2$

5．参考附录 B 中图 10，证明映射 $w=\sin^2 z$ 把带形区域 $0\leqslant x\leqslant\pi/2$，$y\geqslant 0$ 映成半平面 $v\geqslant 0$，指出相应的边界．

提示：参见第 12 节例 3 中的第一段．

6．用附录 B 的图 9 证明，如果 $w=(\sin z)^{1/4}$，这里取分数幂的主值支，那么半无穷带形区域 $-\pi/2<x<\pi/2$，$y>0$ 被映成直线 $v=u$ 和 u 轴之间的位于第一象限的部分，并且指出边界上相应的部分．

328

7．由第 88 节的例 2，分式线性映射

$$Z=\frac{z-1}{z+1}$$

把 x 轴映成 X 轴，并分别把半平面 $y>0$ 和 $y<0$ 映成 $Y>0$ 和 $Y<0$. 特别地，证明它把 x 轴上的线段 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 映成 X 轴上的线段 $X\leqslant 0$. 然后证明，当取平方根的主值支时，复合函数

$$w = Z^{1/2} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$$

把 z 平面上除掉 x 轴上线段 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的部分映成半平面 $u>0$.

8. 求出 z 平面上区域 $r>0$，$-\pi<\Theta<\pi$ 在每一映射 $w=F_k(z)$ $(k=0, 1, 2, 3)$下的像区域. 这里 $F_k(z)$是第 90 节方程(10)中给出的映射 $z^{1/4}$ 的四个分支.

91 多项式的平方根

下面我们考虑由多项式和 z 的平方根复合而成的映射.

例 1 注意到双值函数$(z-z_0)^{1/2}$是平移 $Z=z-z_0$ 和双值函数 $Z^{1/2}$ 的复合，我们就得到双值函数$(z-z_0)^{1/2}$的分支. $Z^{1/2}$ 的每一分支决定了$(z-z_0)^{1/2}$的每一分支. 当 $Z=Re^{i\theta}$ 时，$Z^{1/2}$ 的分支是

$$Z^{1/2} = \sqrt{R}\exp\frac{i\theta}{2} \quad (R>0,\quad \alpha<\theta<\alpha+2\pi).$$

所以如果我们记

$$R = |z-z_0|,\quad \Theta = \operatorname{Arg}(z-z_0),\quad \theta = \arg(z-z_0),$$

$(z-z_0)^{1/2}$的两个分支是

$$G_0(z) = \sqrt{R}\exp\frac{i\Theta}{2} \quad (R>0, -\pi<\Theta<\pi) \tag{1}$$

和

$$g_0(z) = \sqrt{R}\exp\frac{i\theta}{2} \quad (R>0, 0<\theta<2\pi). \tag{2}$$

在记号 $G_0(z)$中用 $Z^{1/2}$ 的分支定义 Z 平面中除原点和射线 $\operatorname{Arg}Z=\pi$ 外的所有点. 所以映射 $w=G_0(z)$是把区域 329

$$|z-z_0|>0,\quad -\pi<\operatorname{Arg}(z-z_0)<\pi$$

映成 w 平面的右半平面 $\operatorname{Re}w>0$ 的一一映射(图 121). 映射 $w=g_0(z)$是把区域

$$|z-z_0|>0,\quad 0<\arg(z-z_0)<2\pi$$

映成 w 平面的上半平面 $\operatorname{Im}w>0$ 的一一映射.

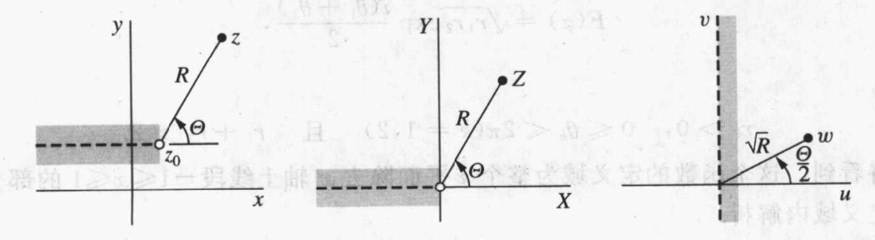


图 121 $w=G_0(z)$

例 2　我们考虑双值函数$(z^2-1)^{1/2}$. 由对数函数的性质，可记作

$$(z^2-1)^{1/2}=\exp\left[\frac{1}{2}\log(z^2-1)\right]=\exp\left[\frac{1}{2}\log(z-1)+\frac{1}{2}\log(z+1)\right],$$

或

$$(z^2-1)^{1/2}=(z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}\quad(z\neq\pm 1). \tag{3}$$

所以，如果$f_1(z)$是$(z-1)^{1/2}$定义在区域D_1上的分支，$f_2(z)$是$(z+1)^{1/2}$定义在区域D_2上的分支，那么乘积$f(z)=f_1(z)f_2(z)$是$(z^2-1)^{1/2}$定义在位于区域D_1和D_2上的所有点的分支.

为得到$(z^2-1)^{1/2}$的一个特殊分支，我们应用由方程(2)给出的$(z-1)^{1/2}$的分支和$(z+1)^{1/2}$的分支. 如果记

$$r_1=|z-1|\quad 和\quad \theta_1=\arg(z-1),$$

则$(z-1)^{1/2}$的分支是

330

$$f_1(z)=\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2}\quad(r_1>0,0<\theta_1<2\pi).$$

由方程(2)给出的$(z+1)^{1/2}$的分支是

$$f_2(z)=\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\qquad(r_2>0,0<\theta_2<2\pi),$$

这里

$$r_2=|z+1|\quad 和\quad \theta_2=\arg(z+1).$$

所以这两个分支的乘积，即$(z^2-1)^{1/2}$的分支f由方程

$$f(z)=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}, \tag{4}$$

决定，这里

$$r_k>0,\quad 0<\theta_k<2\pi\quad(k=1,2).$$

如图 122 所示，函数f在z平面上除去射线$r_2>0$，$\theta_2=0$外处处有定义，射线$r_2>0$，$\theta_2=0$为x轴上$x\geqslant -1$的部分.

由方程(4)给出的$(z^2-1)^{1/2}$的分支f可延拓成

$$F(z)=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}, \tag{5}$$

这里

$$r_k>0,\quad 0\leqslant\theta_k<2\pi(k=1,2)\quad 且\quad r_1+r_2>2.$$

下面我们将看到，这个函数的定义域为整个z平面除去x轴上线段$-1\leqslant x\leqslant 1$的部分，并且该函数在其定义域内解析.

因为对在F的定义域除去射线$r_1>0$，$\theta_1=0$的所有点z，$F(z)=f(z)$，所以我们只需证明F在射线上解析. 为此，我们形成由方程(1)给出的$(z-1)^{1/2}$和$(z+1)^{1/2}$的分支的乘积. 即

考虑函数

$$G(z)=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\Theta_1+\Theta_2)}{2},$$

这里

$$r_1=|z-1|,\quad r_2=|z+1|,\quad \Theta_1=\mathrm{Arg}(z-1),\quad \Theta_2=\mathrm{Arg}(z+1).$$

且

$$r_k>0,\quad -\pi<\Theta_k<\pi\quad(k=1,2).$$

注意到 G 在整个 z 平面上除去射线 $r_1\geqslant0$，$\Theta_1=\pi$ 外解析．当点 z 位于射线 $r_1>0$，$\Theta_1=0$ 上或上面时，$F(z)=G(z)$，所以 $\theta_k=\Theta_k(k=1,2)$．当点 z 位于该射线以下时 $\theta_k=\Theta_k+2\pi(k=1,2)$．所以，$\exp(i\theta_k/2)=-\exp(i\Theta_k/2)$，就是说

$$\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}=\left(\exp\frac{i\theta_1}{2}\right)\left(\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)=\exp\frac{i(\Theta_1+\Theta_2)}{2}.$$

所以，又有 $F(z)=G(z)$．因为 $F(z)$ 和 $G(z)$ 在包含射线 $r_1>0$，$\Theta_1=0$ 的区域内相同且 G 在该区域解析，所以 F 在该区域内解析．所以，在图 122 中，F 除线段 P_2P_1 外处处解析．

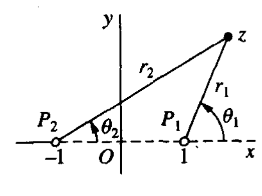


图 122

由方程(5)定义的函数 F 不能延拓到一个在线段 P_2P_1 上也解析的函数．当点 z 沿线段向下移动时，方程(5)右侧的值从点 $i\sqrt{r_1r_2}$ 跳到点 $-i\sqrt{r_1r_2}$ 附近．所以，在这点的延拓甚至是不连续的．

我们将会看到，映射 $w=F(z)$ 是从定义域 D_z 到区域 D_w 的一一映射．这里 D_z 由 z 平面上除去线段 P_2P_1 外的所有点组成，D_w 由 w 平面上除去 v 轴上线段 $-1\leqslant v\leqslant1$ 外的所有点组成(图 123)．

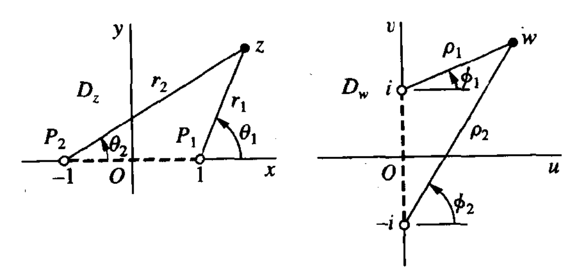


图 123　$w=F(z)$

在证明这一结论之前，我们注意到如果 $z=iy(y>0)$，那么

$$r_1 = r_2 > 1 \quad \text{和} \quad \theta_1 + \theta_2 = \pi;$$

331～332

所以，正 y 轴由 $w=F(z)$ 映为 v 轴上 $v>1$ 的一部分. 此外，负 y 轴映成了 v 轴上 $v<-1$ 的部分. 区域 D_z 在上半平面 $y>0$ 的每一点映成了 w 平面的上半部分 $v>0$. 区域 D_z 在下半平面 $y<0$ 的每一点映成了 w 平面的下半部分 $v<0$. 射线 $r_1>0$，$\theta_1=0$ 映成 w 平面的正实轴，射线 $r_2>0$，$\theta_2=\pi$ 映成 w 平面的负实轴.

下面证明映射 $w=F(z)$ 是一一的. 如果 $F(z_1)=F(z_2)$，那么 $z_1^2-1=z_2^2-1$. 从而，$z_1=z_2$ 或 $z_1=-z_2$. 由 F 分别映射区域 D_z 的上下平面的方式，以及位于区域 D_z 的实轴部分可知，$z_1=-z_2$ 是不可能的. 所以，如果 $F(z_1)=F(z_2)$，那么 $z_1=z_2$；F 是一一的.

如果找到一个函数 H，若 $z=H(w)$，则 $w=F(z)$，函数 H 把区域 D_w 映成区域 D_z，那么我们可以证明，F 把区域 D_z 映到区域 D_w. 下面我们将证明，对于区域 D_w 中的任意一点 w，存在区域 D_z 中的一点 z，使得 $F(z)=w$，即映射 F 是到上的. 映射 H 将是映射 F 的逆映射.

为找到 H，首先我们注意到，如果 w 是关于特殊的 z 的 $(z^2-1)^{1/2}$ 的一个值，则 $w^2=z^2-1$；所以，z 是 $(w^2+1)^{1/2}$ 关于 w 的一个值. 函数 H 将是双值函数

$$(w^2+1)^{1/2} = (w-i)^{1/2}(w+i)^{1/2} \quad (w \neq \pm i).$$

的一个分支. 由得到函数 $F(z)$ 的过程，我们记 $w-i=\rho_1\exp(i\phi_1)$ 和 $w+i=\rho_2\exp(i\phi_2)$（见图 123），且

$$\rho_k > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \phi_k < \frac{3\pi}{2} \quad (k=1,2) \text{ 且 } \quad \rho_1+\rho_2 > 2,$$

则我们可写作

$$H(w) = \sqrt{\rho_1\rho_2}\exp\frac{i(\phi_1+\phi_2)}{2}, \tag{6}$$

其定义域为 D_w. 映射 $z=H(w)$ 把 D_w 中位于 u 轴以上或 u 轴以下的点分别映成 x 轴上面或下面的点，并把正 u 轴映为正 x 轴上 $x>1$ 的部分，把负 u 轴映为负 x 轴上 $x<-1$ 的部分. 如果 $z=H(w)$，则 $z^2=w^2+1$，所以 $w^2=z^2-1$. 因为 z 在 D_z 中且 $F(z)$ 和 $-F(z)$ 是 D_z 中点的 $(z^2-1)^{1/2}$ 的两个值，所以 $w=F(z)$ 或 $w=-F(z)$. 但是从 F 和 H 分别映射它们定义域的上半平面和下半平面以及位于该定义域内的实轴部分的方式可知，$w=F(z)$.

由双值函数的分支形成的映射

$$w = (z^2+Az+B)^{1/2} = [(z-z_0)^2-z_1^2]^{1/2} \quad (z_1 \neq 0),$$
$$\text{这里 } A=-2z_0, \quad B=z_0^2=z_1^2. \tag{7}$$

333

可看作是例 2 中的函数 H 和连续映射

$$Z = \frac{z-z_0}{z_1}, \quad W = (Z^2-1)^{1/2}, \qquad w = z_1 W. \tag{8}$$

的附加结果.

练习

1. 第 91 节例 2 中函数 $(z^2-1)^{1/2}$ 的分支 F 按照坐标 r_1，r_2，θ_1，θ_2 定义，从几何上解释为

什么坐标 $r_1>0$，$0<\theta_1+\theta_2<\pi$ 就是 z 平面上的第一象限 $x>0$，$y>0$. 然后证明映射 $w=F(z)$ 把 z 平面上的第一象限映成 w 平面上的第一象限 $u>0$，$v>0$.

提示：为了证明所描述的就是 z 平面上的第一象限 $x>0$，$y>0$，注意在正 y 轴上的每一点有 $\theta_1+\theta_2=\pi$，当点 z 沿射线 $\theta_2=c(0<c<\pi/2)$ 向右移动时，$\theta_1+\theta_2$ 就会减小.

2. 在练习 1 中映射 $w=F(z)$ 把 z 平面上的第一象限映成 w 平面上的第一象限，证明

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1r_2+x^2-y^2-1} \quad 和 \quad v=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1r_2-x^2+y^2+1},$$

这里 $(r_1r_2)^2=(x^2+y^2+1)^2-4x^2$，双曲线 $x^2-y^2=1$ 在第一象限的部分的像是射线 $v=u(u>0)$.

3. 证明练习 2 中位于 z 平面上第一象限的双曲线以下的区域 D 是 $r_1>0$，$0<\theta_1+\theta_2<\pi/2$. 证明 D 的像是八分圆 $0<v<u$，描述区域 D 和它的像.

4. 令 F 是第 91 节练习 2 中定义的 $(z^2-1)^{1/2}$ 的分支，令 $z_0=r_0\exp(i\theta_0)$ 是一个不动点，这里 $r_0>0$，$0\leqslant\theta_0<2\pi$. 证明 $(z^2-z_0^2)^{1/2}$ 的分支 F_0 割破点 z_0 和 $-z_0$ 之间的线段并可写成 $F_0(z)=z_0F(Z)$，这里 $Z=z/z_0$.

5. 记 $z-1=r_1\exp(i\theta_1)$，$z+1=r_2\exp(i\Theta_2)$，这里

$$0<\theta_1<2\pi \quad 和 \quad -\pi<\Theta_2<\pi,$$

定义函数(a) $(z^2-1)^{1/2}$；(b) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$ 的分支. 在每一种情况下，支割线都是由两条射线 $\theta_1=0$，$\Theta_2=\pi$ 组成.

6. 用第 91 节的概念证明函数

$$w=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\exp\frac{i(\theta_1-\theta_2)}{2}$$

334

是与第 91 节中函数 $w=F(z)$ 的定义域 D_z 相同、支割线也相同的分支. 证明这一映射把 D_z 映成右半平面 $\rho>0$，$-\pi/2<\phi<\pi/2$，这里点 $w=1$ 是点 $z=\infty$ 的像点. 并且证明其逆映射是

$$z=\frac{1+w^2}{1-w^2} \quad (\mathrm{Re}\ w>0).$$

(参考第 90 节中的练习 7)

7. 证明练习 6 中的映射把 z 平面的上半平面中单位圆 $|z|=1$ 外的区域映成 w 平面第一象限中直线 $v=u$ 和 u 轴之间的区域. 并描述这两个区域.

8. 我们记：$z=r\exp(i\Theta)$，$z-1=r_1\exp(i\Theta_1)$，$z+1=r_2\exp(i\Theta_2)$，其三个辐角的值都位于 $-\pi$ 和 π 之间. 定义函数 $[z(z^2-1)]^{1/2}$ 的分支，使得支割线由 x 轴上的线段 $x\leqslant-1$ 和 $0\leqslant x\leqslant1$ 组成.

92 黎曼曲面

本章的最后两节我们对定义在黎曼面上的映射的概念做一个简单的介绍. 这个概念是由不止一个叶片组成的复平面的推广. 这一理论依赖于下面的一个事实：即黎曼面上的每一点仅仅

对应着给定多值函数的一个值．这两节的主要内容不会在后面的章节中用到，读者可以跳过这里直接阅读第 9 章．

对于一个给定的函数来说，一旦黎曼面给定，函数在这个面上就是单值的，并且应用的都是单值函数的理论．因为函数是多值的，所以可由几何工具恢复，复杂性也就加大．然而，会涉及叶片与叶片之间的黎曼面的描述和适当概念的安排．我们仅考虑相当简单的例子，以 $\log z$ 的面为例．

例 1 对于每一非零函数 z，多值函数

$$\log z = \ln r + i\theta \tag{1}$$

有无穷多个值．为了像一个单值函数那样描述 $\log z$ 的性质，我们用这样的一个平面(称为黎曼面)来代替去掉原点的 z 平面．在这个平面上，每当 z 的辐角增加或减少 2π 或 2π 的整数倍，$\log z$ 就对应平面上一个新的点．

我们把去掉原点的 z 平面作为沿正实轴割破的叶片 R_0．在叶片 R_0 上，令 θ 从 0 变到 2π．令第二个叶片 R_1 沿同样的方式割破并把它放在叶片 R_0 的前面．将 R_0 截口的下岸同 R_1 截口的上岸粘合．在叶片 R_1 上，角 θ 从 2π 变到 4π；所以 z 可以用 R_1 上的点重新表示，此时 $\log z$ 的虚部从 2π 变到 4π．

335

叶片 R_2 以同样的方式割破，把它放在叶片 R_1 的前面，叶片 R_1 截口的下岸同叶片 R_2 截口的上岸粘合．类似地，叶片 R_3，R_4，…都以同样的方式割破且以同样的方式粘合．在叶片 R_{-1} 的割破面上，θ 从 0 变到 -2π，把它放在叶片 R_0 的前面；以同样的方式得到叶片 R_{-2}，R_{-3}，…．在任一叶片上，点的坐标 r 和 θ 都可看作原始 z 平面上点的投影的极坐标．限制 θ 的角坐标，在每一叶片上确定其范围为 2π 弧度．

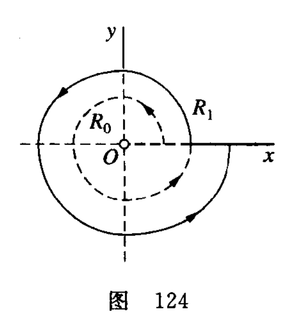


图 124

在这些由无穷多叶片连成的面上考虑任意的连续曲线．当点 z 跑遍曲线时，$\log z$ 的值是连续的，因为 θ 是连续的，此外，r 也连续地变化；此时曲线上的每一点都仅有一个 $\log z$ 的值和它对应．例如，当点 z 在叶片 R_0 上围绕原点沿如图 124 所示的路径移动形成整圆时，其角从 0 变到 2π．当它穿过射线 $\theta=2\pi$ 时，点进入叶片 R_1，其角从 2π 变到 4π；当它穿过射线 $\theta=4\pi$ 时，点进入叶片 R_2．

这里描述的是 $\log z$ 的黎曼面．它是由无穷多叶片组成的连通的面，使得对黎曼面上的点，$\log z$ 是单值函数．

映射 $w=\log z$ 把整个黎曼面一一地映成整个 w 平面，叶片 R_0 的像是带形 $0\leqslant v\leqslant 2\pi$(见第

88 节的例 3)．当点 z 在叶片 R_1 上沿如图 125 所示的弧移动时，它的像 w 沿如图所示的直线 $v=2\pi$ 向上移动．

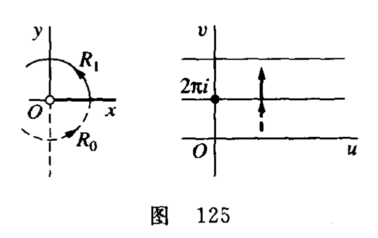


图 125

336

注意到定义在叶片 R_1 上的 $\log z$ 就是解析函数

$$f(z)=\ln r+i\theta \quad (0<\theta<2\pi)$$

沿正实轴向上运动的解析连续．$\log z$ 不仅仅是黎曼面上所有点 z 的单值函数，也是该黎曼面上所有点 z 的解析函数．

当然这些叶片也可以沿负实轴或其他从原点出发的射线割破，并适当地粘合这些叶片的截口形成 $\log z$ 的黎曼面．

例 2 对 z 平面上每一个异于零的点，平方根函数

$$z^{1/2}=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \tag{2}$$

有两个值和它相对应．如果叶片 R_0 和叶片 R_1 都割破正实轴，把它们粘合起来，并且 R_1 在 R_0 的前面，R_0 的截口的下岸与 R_1 的截口的上岸粘合，R_1 的截口的下岸与 R_0 的截口的上岸粘合，以之代替 z 平面，我们就得到 $z^{1/2}$ 的黎曼面．

当点 z 从 R_0 的截口的上岸沿逆时针方向连续绕原点一周(图 126)，辐角 θ 从 0 增至 2π 并从叶片 R_0 进入叶片 R_1，在后一叶片 R_1 中，θ 再由 2π 增至 4π．当点 z 再继续运动时，它仍回到叶片 R_0 上．在 R_0 上，θ 的值可以认为是由 4π 增至 6π，或由 0 增至 2π，对于函数 $z^{1/2}$ 的值没有影响．注意，当点 z 从叶片 R_0 进入叶片 R_1 时，$z^{1/2}$ 的值不同于从叶片 R_1 进入叶片 R_0 时的值．

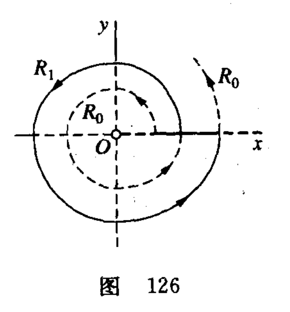


图 126

这样，我们就得到了一个黎曼面，在这个黎曼面上，对每一非零点 z，$z^{1/2}$ 都是单值的．此时，叶片 R_0 和叶片 R_1 的边缘一对一地粘合在一起，形成的面是闭的且是连通的．两个截口粘合到一起的点同另外两个截口粘合到一起的点不同．所以从物理上讲，我们无法构建成一个黎曼面的模型．如果我们知道在截口的边缘点是如何前进的，就会对黎曼面更加清楚．

337

在黎曼面上，原点是一个特殊的点．对两个叶片来说相同的是，黎曼面上绕原点的曲线必须绕两次才能保证是闭曲线．我们把黎曼面上的这种点叫做支点．

黎曼面的叶片 R_0 在映射 $z^{1/2}$ 下的像是上半 w 平面，因为在 R_0 上 w 的辐角是 $\theta/2$，$0\leqslant\theta/2\leqslant\pi$．而叶片 R_1 的像是下半 w 平面．在每一叶片上，函数是解析连续的，如果越过支割线，那么函数就定义在另一叶片上．在这种情况下，单值函数 $z^{1/2}$ 在黎曼面上除原点外都是解析的．

练习

1. 试作出 $\log z$ 沿负实轴割破 z 平面的黎曼面. 并同第 92 节例 1 中得到的黎曼面比较.

2. 求在叶片 R_n 上映射 $w=\log z$ 的像，这里 n 是任意整数，$\log z$ 的黎曼面已在第 92 节的例 1 中给出.

3. 证明，在映射 $w=z^{1/2}$ 下，第 92 节例 2 中给出的 $z^{1/2}$ 的黎曼面上的叶片 R_1 映成 w 平面的下半平面.

4. 在 $z^{1/2}$ 的黎曼面上求出在映射 $w=z^{1/2}$ 下，像为整个圆周 $|w|=1$ 的曲线.

5. 令 C 为第 92 节例 2 中 $z^{1/2}$ 的黎曼面上的正定向圆周 $|z-2|=1$，对 $z^{1/2}$，上半圆位于 R_0 上，而下半圆位于 R_1 上. 对于 C 上每一点 z，

$$z^{1/2}=\sqrt{r}e^{i\theta/2},\quad 4\pi-\frac{\pi}{2}<\theta<4\pi+\frac{\pi}{2}.$$

证明

$$\int_C z^{1/2}\,dz=0.$$

推广这一结果，对其他没有围绕支点从一片进入另一片的简单闭曲线，推广到其他函数，延拓了多值函数积分的柯西-古萨定理.

93 相关函数的黎曼曲面

338 现在我们考虑简单多项式函数和平方根函数的复合函数的黎曼面.

例 1 首先作出双值函数

$$f(z)=(z^2-1)^{1/2}=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2},\tag{1}$$

的黎曼面，这里 $z-1=r_1\exp(i\theta_1)$，$z+1=r_2\exp(i\theta_2)$. 这一函数的分支以支点 $z=\pm1$ 之间的线段 P_1P_2 为支割线(图 127)，已在第 91 节的例 2 中讨论过. 上面的分支为 $r_k>0$，$0\leqslant\theta_k<2\pi$ $(k=1, 2)$，且 $r_1+r_2>2$. 这个分支在线段 P_1P_2 上无定义.

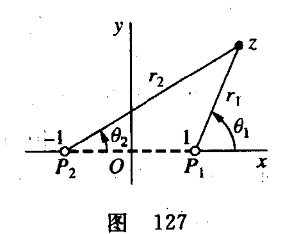


图 127

双值函数(1)的黎曼面必须由叶片 R_0 和 R_1 组成. 令这两个叶片都沿线段 P_1P_2 割破 z 平面. R_0 的截口的下岸与 R_1 的截口的上岸粘合，R_1 的截口的下岸与 R_0 的截口的上岸粘合.

在叶片 R_0 上，令角 θ_1 和 θ_2 都从 0 变到 2π. 如果叶片 R_0 上一点围绕线段 P_1P_2 沿逆时针方向旋转一次形成一简单闭曲线，则角 θ_1 和 θ_2 都从该点回到原点，改变了 2π. $(\theta_1+\theta_2)/2$ 的改变量也是 2π，函数 f 的值未变. 如果叶片 R_0 上一点围绕支点 $z=1$ 旋转两次，它从叶片 R_0

进到叶片 R_1，在回到其原始位置之前，回到叶片 R_0. 此时 θ_1 的值改变了 4π，θ_2 的值未变. 类似地，对于点 z 围绕支点 $z=-1$ 旋转两次形成的圆，θ_2 的值改变了 4π，θ_1 的值未变. 同样，$(\theta_1+\theta_2)/2$ 也改变了 2π；f 的值未变. 所以在叶片 R_0 上，通过对角 θ_1 和 θ_2 都改变 2π 的整数倍，或只对其中之一个角改变 4π 的整数倍，可对 θ_1 和 θ_2 的范围延拓.

为得到叶片 R_1 上角 θ_1 和 θ_2 的变化范围，我们看到，如果 R_0 上一点仅围绕支点之一旋转一次形成路径，那么它进入叶片 R_1 并不再回到 R_0. 此时，其中一个角的值改变了 2π，而另一个角的值未变. 所以在叶片 R_1 上，一个角可以从 2π 变到 4π，另一个角从 0 变到 2π. 它们的和从 2π 变到 4π，$f(z)$的辐角$(\theta_1+\theta_2)/2$ 从 π 变到 2π. 同样，对其中一个角的值改变 4π 的整数倍，或改变两个角的相同的 2π 的整数倍，就可以求出角的变化范围. 339

这样双值函数(1)可视为刚刚所得到的黎曼面上点的单值函数. 黎曼面的每一片经映射 $w=f(z)$映成了整个 w 平面.

例 2 考虑双值函数(图 128)

$$f(z)=[z(z^2-1)]^{1/2}=\sqrt{rr_1r_2}\exp\frac{i(\theta+\theta_1+\theta_2)}{2} \tag{2}$$

点 $z=0$，±1 为该函数的支点. 如果点 z 形成了包含这三点的一个圆，那么 $f(z)$的辐角改变了 3π，函数值因此改变. 所以为得到 $f(z)$的单值分支，需要从其中的一个支点到无穷远点为支割线. 所以无穷远点也是支点，可通过函数 $f(1/z)$在 $z=0$ 有支点证明.

令两个叶片分别沿从 $z=-1$ 到 $z=0$ 的线段 L_2 和实轴上点 $z=1$ 的右侧的 L_1 割破 z 平面. 三个角 θ，θ_1 和 θ_2 中的每一个在叶片 R_0 上从 0 变到 2π，在叶片 R_1 上从 2π 变到 4π. 每一片上一点所对应的角改变 2π 的整数倍，三个角的和以同样的方式改变了 4π 的整数倍. 函数 f 的值没有改变.

分别沿 L_1 和 L_2 粘合 R_0 截口的下岸和 R_1 截口的上岸，这样就得到了双值函数(2)的黎曼面. R_1 截口的下岸分别沿 L_1 和 L_2 粘合 R_0 截口的上岸. 参照图 128，容易证明，函数的其中一个分支可由它在 R_0 上的点表示，另一分支可由它在 R_1 上的点表示.

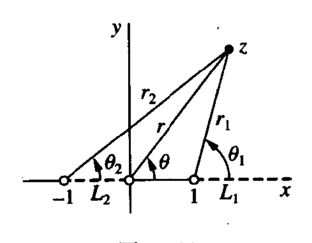


图 128

练习

1. 做出三值函数 $w=(z-1)^{1/3}$的黎曼面，并指出哪三个 w 平面代表该黎曼面上每一叶片的像. 340

2. 第 93 节例 2 中函数 $w=f(z)$的黎曼面上每一点仅仅对应一个 w 的值. 证明，一般地，

每一个 w 的值都对应黎曼面上的三个点.

3. 做出多值函数

$$f(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{1/2}$$

的黎曼面.

4. 第 93 节例 1 中函数 $(z^2-1)^{1/2}$ 的黎曼面，也是函数

$$g(z)=z+(z^2-1)^{1/2}.$$

的黎曼面. 令 f_0 是 $(z^2-1)^{1/2}$ 定义在叶片 R_0 上的分支，证明 g 在叶片 R_0 和叶片 R_1 上的分支 g_0 和 g_1 由方程

$$g_0(z)=\frac{1}{g_1(z)}=z+f_0(z)$$

给出.

5. 在练习 4 中，$(z^2-1)^{1/2}$ 的分支 f_0 可由方程

$$f_0(z)=\sqrt{r_1r_2}\left(\exp\frac{i\theta_1}{2}\right)\left(\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)$$

得到，这里 θ_0 和 θ_1 从 0 到 2π，且

$$z-1=r_1\exp(i\theta_1),\quad z+1=r_2\exp(i\theta_2).$$

注意到 $2z=r_1\exp(i\theta_1)+r_2\exp(i\theta_2)$，证明函数 $g(z)=z+(z^2-1)^{1/2}$ 的分支 g_0 可写成如下形式

$$g_0(z)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2}+\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)^2.$$

求出 $g_0(z)\overline{g_0(z)}$，这里对所有的 z，$r_1+r_2\geqslant 2$，$\cos[(\theta_1-\theta_2)/2]\geqslant 0$，并证明 $|g_0(z)|\geqslant 1$. 然后证明，映射 $w=z+(z^2-1)^{1/2}$ 把黎曼面的叶片 R_0 映成区域 $|w|\geqslant 1$，把叶片 R_1 映成区域 $|w|\leqslant 1$，把点 $z=\pm 1$ 之间的支割线映成圆 $|w|=1$. 注意这里所用的映射是映射 $z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$ 的逆映射。

341

第9章 保形映射

在本章中，我们将介绍保形映射的概念，并重点强调这种映射和调和函数的联系．其相关的具体应用将在下一章进行讨论．

94 解析函数的保形性

设 C 为光滑曲线(38 节)，由下式表示：

$$z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

$f(z)$为定义在 C 上的函数．设

$$w = f[z(t)] \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

为 C 在 $w=f(z)$下的图像 Γ 的参数化表示．

假设 C 过点 $z_0=z(t_0)(a<t_0<b)$，f 在点 t_0 解析，且满足 $f'(z_0)\neq 0$．根据链式法则(第 8 节练习 5)，如果 $w(f)=f[z(t)]$，则

$$w'(t_0) = f'[z(t_0)]z'(t_0); \tag{1}$$

即(见第 7 节)

$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0). \tag{2}$$

343

在曲线 C 与图像 Γ 分别在点 z_0 和 $w_0=f(z_0)$的方向的讨论中，式(2)将是十分有用的．

特别地，定义 ψ_0 为 $f'(z_0)$的幅角，θ_0 为 C 在点 z_0 的切线的倾角(图 129)．根据 38 节，θ_0 是 $z'(t_0)$的幅角；根据式(2)，有

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

为 $w'(t_0)$的幅角，即 Γ 在 $w_0=f(z_0)$的切线的倾角．因此在 w_0 的切线的倾角与在 z_0 的切线的倾角仅相差一个旋转

$$\psi_0 = \arg f'(z_0).$$

图 129 $\phi_0=\psi_0+\theta_0$

令 C_1、C_2 为过 z_0 的两条光滑曲线，θ_1、θ_2 分别表示 C_1、C_2 在点 z_0 的切线的倾角．从前面的讨论中我们可以得到，

$$\phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \quad 和 \quad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$$

分别表示图像 Γ_1、Γ_2 在点 $w_0=f(z_0)$的切线的倾角．因此，$\phi_2-\phi_1=\theta_2-\theta_1$，也就是说，$\Gamma_1$ 到 Γ_2 的角 $\phi_2-\phi_1$ 在数量和意义上是与 C_1 到 C_2 的角 $\theta_2-\theta_1$ 相同的．这些角在图 130 中都被定义为 α.

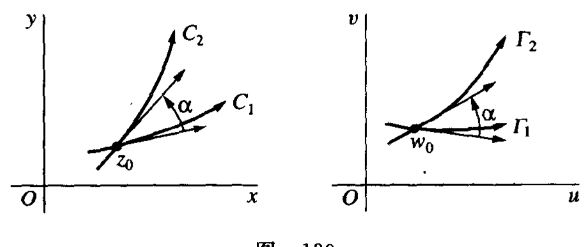


图 130

根据这种保形性，一个映射 $w=f(z)$在点 z_0 是保形的，如果 f 解析且满足 $f'(z_0)\neq 0$．实

344

际上，这种映射在点 z_0 的一个邻域内都是保形的，因为 f 在点 z_0 的一个邻域内是解析的(23 节)，且 f'在点 z_0 是连续的(48 节)，根据 12 节定理 2，存在一个邻域，满足该邻域内所有点都有 $f'(z)\neq 0$.

一个映射 $w=f(z)$如果在区域 D 上任意点都是保形的，则它在区域 D 上是保形变换或保形映射，即如果在 D 内 f 解析且其导数 f'没有零点，f 是保形映射．在第 3 章学习过的每一个初等函数都可以定义为某区域内的保形映射.

例 1 映射 $w=e^z$ 在整个 z 平面上是保形映射，因为在任意点$(e^z)'=e^z\neq 0$．考虑 z 平面内任意两条直线 $x=c_1$，$y=c_2$，其中第一条方向向上，第二条方向向右．根据第 13 节，它们在映射 $w=e^z$ 下的图像分别为以原点为中心的定义正方向的圆和从原点出发的一条射线．根据图 20(13 节)，直线的夹角在负方向上是直角；同样地，在 w 平面上圆与射线的夹角在负方向上也是直角．映射 $w=e^z$ 的结构在附录 B 的图 7、8 中也有讨论.

例 2 考虑两条光滑曲线 $u(x, y)=c_1$ 和 $v(x, y)=c_2$，分别表示函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

的实部和虚部，它们相交于点 z_0，f 在该点解析且 $f'(z_0)\neq 0$．则映射 $w=f(z)$在点 z_0 保形，且把这两条曲线映射为在点 $w_0=f(z_0)$正交的两条直线 $u=c_1$ 和 $v=c_2$．根据我们的结论可知，这两条曲线在点 z_0 正交．这个结论在 25 节的练习 7 到 11 中早已证明并讨论过了.

一个映射称为保角映射，如果在数值上保持两光滑曲线的夹角不变，但并不要求在意义上也保持.

例 3 映射 $w=\bar{z}$ 作为实轴上的一个反射，是保角但不保形的．如果在它上面作用一个保形映射，则作用后的映射 $w=f(\bar{z})$也是保角但不保形的.

设 f 不是常值函数且在点 z_0 解析．如果还满足 $f'(z_0)=0$，则 z_0 称为映射 $w=f(z)$的临界点.

例 4 点 $z=0$ 是映射

345

$$w=1+z^2$$

的一个临界点．该映射是两函数的复合：

$$Z = z^2 \quad w = 1 + Z.$$

显然，从点 $z=0$ 出发的 $\theta=\alpha$ 的射线被映射为从点 $w=1$ 出发的倾角为 2α 的射线．更一般地，从临界点 $z=0$ 出发的任意两条射线的夹角经这个映射都变为原来的二倍．

通常可以证明，如果点 z_0 是映射 $w=f(z)$的一个临界点，则存在一个整数 $m(m\geqslant 2)$，使得任意过点 z_0 的两条光滑曲线的夹角在这个映射的作用下成为原来的 m 倍．这个整数 m 即是满足 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$ 的最小正整数．该结果的证明留作练习．

95 伸缩因子

设映射 $w=f(z)$在点 z_0 是保形的，则通过考虑 $f'(z_0)$的系数可以获得它的另一个性质．根据导数的定义和 17 节练习 7 中提到的关于模的极限的性质，我们知道

$$|f'(z_0)| = \left|\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}. \tag{1}$$

其中 $|z-z_0|$ 表示连接 z_0 和 z 的线段的长度，$|f(z)-f(z_0)|$ 表示 w 平面内连接点 $f(z_0)$ 和 $f(z)$的线段的长度．显然，当 z 接近 z_0 时，两线段的比

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

接近于 $|f'(z_0)|$．注意，$|f'(z_0)|$ 表示扩大，如果它比单位 1 大；否则表示缩小．

尽管通常情况下，从一点到另一点，旋转角 $\arg f'(z)$(94 节)和伸缩因子 $|f'(z)|$ 都会改变，但由于 f' 的连续性，当点 z 接近点 z_0 时，它们的值接近 $\arg f'(z_0)$和 $|f'(z_0)|$．因此，点 z_0 的邻域内的一个小区域的图像和原区域在意义上是相一致的，即它们有相似的形状．但是一个大区域可能被映射为一个同原区域完全不同的区域．

例 令 $f(z)=z^2$，则映射

$$w = f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

[346]

在半直线

$$y = x(x\geqslant 0), \quad x = 1(x\geqslant 0)$$

的相交点 $z=1+i$ 保形．定义这两条半直线为 C_1 和 C_2，其中正方向向上，显然在相交点从 C_1 到 C_2 的角为 $\pi/4$(图 131)．因为点 $z=(x, y)$在 w 平面内的图像为一点，其直角坐标系中的坐标为

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{和} \quad v = 2xy,$$

所以半直线 C_1 被映为用参数

$$u = 0, \quad v = 2x^2 \quad (0\leqslant x<\infty) \tag{2}$$

表示的曲线 Γ_1，因此 Γ_1 为 v 轴的上半部分 $v\geqslant 0$．半直线 C_2 被映为用参数

$$u = 1 - y^2, \quad v = 2y \quad (0\leqslant y<\infty) \tag{3}$$

表示的曲线 Γ_2，因此 Γ_2 为抛物线 $v^2=-4(u-1)$的上半部分．注意，任何一种情况下，图像的正方向朝上．

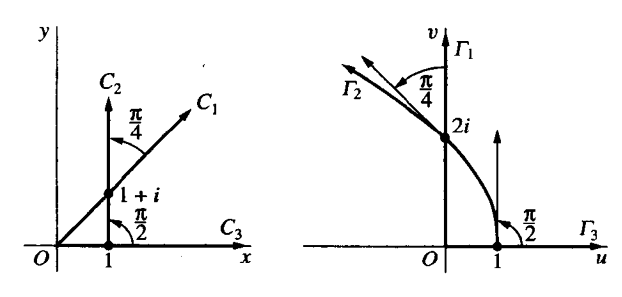


图 131 $w=z^2$

如果 u 和 v 是式(3)所表示的图像 Γ_2 的变量，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}v/\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u/\mathrm{d}y}=\frac{2}{-2y}=-\frac{2}{v}.$$

特别地，当 $v=2$ 时，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=-1$. 正如我们所希望的，根据映射在点 $z=1+i$ 的保形性，在点 $w=f(1+i)=2i$，图像 Γ_1 到图像 Γ_2 的角为 $\pi/4$. 即 $\pi/4$ 是在点 $z=1+i$ 的旋转角

$$\arg[f'(1+i)]=\arg[2(1+i)]=\frac{\pi}{4}+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的其中一个值 $\pi/4$. 在该点的伸缩因子为

347

$$|f'(1+i)|=|2(1+i)|=2\sqrt{2}.$$

为了阐明从一点到另一点的旋转角和伸缩因子是怎样变化的，我们注意，在点 $z=1$，因为 $f'(1)=2$，它们分别为 0 和 2. 在图 131 中，C_2 和 Γ_2 正是被讨论的图像，且 x 的非负半轴 C_3 被映射为 u 轴的非负半轴 Γ_3.

96 局部逆

若映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 保形，则它在该点存在*局部逆*. 即如果 $w_0=f(z_0)$，则存在唯一的映射 $z=g(w)$，它在 w_0 的某个邻域 N 内有定义且解析，使得 $g(w_0)=z_0$，且对 N 内所有点 w 有 $f[g(w)]=w$. 进一步地，$g(w)$ 导数为

$$g'(w)=\frac{1}{f'(z)}.\tag{1}$$

从表达式(1)可知映射 $z=g(w)$ 在点 w_0 解析.

假定 $w=f(z)$ 在点 z_0 保形，下面将证明，作为高等微积分学⊖的一个直接的推论，逆是存在的. 根据 94 节，映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 保形意味着存在 z_0 的某个邻域，使 f 解析. 因此，如果记

$$z=x+iy,\quad z_0=x_0+iy_0,\quad f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

我们知道，存在点 (x_0,y_0) 的一个邻域，使得 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的各阶偏导都连续(见 48 节).

⊖ 本节所用的高等微积分学的结果可参见 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed., pp. 241-247, 1983.

下面两个等式

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \tag{2}$$

表示上述邻域到 uv 平面的一个映射，x、y 为 uv 平面内的上述邻域内的点．则该映射的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y,$$

在点(x_0, y_0)非零．根据柯西-黎曼方程 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$，我们可以记 J 为

$$J = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2;$$

348

且由于 $w=f(z)$在点 z_0 保形，所以 $f'(z_0) \neq 0$．函数 $u(x, y)$和 $v(x, y)$及它们的导数的连续性条件，还有雅可比行列式的连续性，可以充分确保映射(2)在点 z_0 存在逆．也就是说，如果

$$u_0 = u(x_0, y_0) \quad 和 \quad v_0 = v(x_0, y_0), \tag{3}$$

则有唯一的连续函数

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \tag{4}$$

在点(u_0, v_0)的某个邻域 N 内有定义，且映该点为(x_0, y_0)，即当式(4)成立时式(2)成立．若再增加连续条件，则函数(4)有连续的一阶偏导，且满足在 N 内

$$x_u = \frac{1}{J}v_y, \quad x_v = -\frac{1}{J}u_y, \quad y_u = -\frac{1}{J}v_x, \quad y_v = \frac{1}{J}u_x. \tag{5}$$

如果记 $w=u+iv$ 和 $w_0=u_0+iv_0$，同样地，

$$g(w) = x(u,v) + iy(u,v), \tag{6}$$

则映射 $z=g(w)$显然为原映射 $w=f(z)$在点 z_0 的逆元．映射(2)和(4)可以写为

$$u + iv = u(x,y) + iv(x,y), \quad x + iy = x(u,v) + iy(u,v);$$

后两个等式和

$$w = f(z) \quad 和 \quad z = g(w)$$

是相同的，且 g 具有我们所期望的性质．通过等式(5)可以证明 g 在 N 解析．至于 $g'(w)$的表达式(1)的导出细节留作练习．

例 在 94 节的例 1 中我们知道，若 $f(z)=e^z$ 则映射 $w=f(z)$在整个 z 平面内保形，特别地，在点 $z_0=2\pi i$ 保形．z_0 的图像为点 $w_0=1$．当 w 平面内的点表示为 $w=\rho\exp(i\phi)$的形式时，在点 z_0 的逆可以通过 $g(w)=\log w$ 获得，其中 $\log w$ 定义为对数函数的一条分支

$$\log w = \ln\rho + i\phi \quad (\rho > 0, \pi < \theta < 3\pi),$$

使得 w_0 的任何邻域都不包括原点．观察知，

$$g(1) = \ln 1 + i2\pi = 2\pi i$$

349

且当 w 在该邻域时，

$$f[g(w)] = \exp(\log w) = w.$$

同样，根据等式(1)

$$g'(w)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\log w=\frac{1}{w}=\frac{1}{\exp z}.$$

注意，当点 $z_0=0$ 时，可以利用对数函数的主值支

$$\mathrm{Log}w=\ln\rho+i\phi \quad (\rho>0,-\pi<\phi<\pi)$$

定义 g. 在这种情况下，$g(1)=0$.

练习

1. 确定映射 $w=z^2$ 在点 $z=2+i$ 的旋转角，且对某个详细的图像阐明. 证明此映射在该点的伸缩因子为 $2\sqrt{5}$.

2. 计算映射 $w=1/z$ 在下列各点的旋转角：

(a)$z=1$；　　(b)$z=i$.

答案：(a)π；　(b)0.

3. 证明在映射 $w=1/z$ 下，直线 $y=x-1$ 和 $y=0$ 的图像分别为圆 $u^2+v^2-u-v=0$ 和直线 $v=0$. 绘制四个图像，确定相应的方向，且证明在点 $z=1$ 映射保形.

4. 证明非零点 $z_0=r_0\exp(i\theta_0)$ 在映射 $w=z^n(n=1, 2, \cdots)$ 下的旋转角为 $(n-1)\theta_0$. 确定该映射在该点的伸缩因子.

答案：nr_0^{n-1}.

5. 证明映射 $w=\sin z$ 在除

$$z=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

外的所有点保形. 注意，这是和附录 B 的图 9、10、11 所示直线段的映射相一致的.

6. 确定映射 $w=z^2$ 在下列各点的局部逆.

(a)$z_0=2$；　(b)$z_0=-2$；　(c)$z_0=-i$.

答案：(a)$w^{1/2}=\sqrt{\rho}e^{i\phi/2}(\rho>0, -\pi<\phi<\pi)$；

(c)$w^{1/2}=\sqrt{\rho}e^{i\phi/2}\quad(\rho>0, 2\pi<\phi<4\pi)$.

7. 96 节中曾指出，由等式(6)定义的局部逆 $g(w)$ 的两部分 $x(u, v)$ 和 $y(u, v)$ 在邻域 N 内连续，且有连续的一阶偏导. 运用 96 节的等式(5)证明，在 N 内柯西-黎曼方程 $x_u=y_v$，$x_v=-y_u$ 成立. 因此可得出结论 $g(w)$ 在该邻域内解析.

350

8. 证明若 $z=g(w)$ 是保形映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 的局部逆，则在 g 解析的一个邻域内(练习 7)，每一点都满足

$$g'(w)=\frac{1}{f'(z)}.$$

提示：利用事实 $f[g(w)]=w$，对微分复合函数应用链式法则.

9. 设映射 $w=f(z)$ 在区域 D 保形，C 为区域 D 内一条光滑曲线，定义 Γ 为 C 在该映射下的图像. 证明 Γ 也是一条光滑曲线.

10. 设函数 f 在点 z_0 解析，且对某个整数 $m(m\geq1)$

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

记 $w_0=f(z_0)$.

(a)利用 f 在点 z_0 的泰勒级数证明，存在 z_0 的一个邻域，使得 $f(z)-w_0$ 可以写为

$$f(z)-w_0=(z-z_0)^m\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}[1+g(z)],$$

其中，$g(z)$在点 z_0 连续且 $g(z_0)=0$.

(b)令 Γ 为光滑曲线 C 在映射 $w=f(z)$下的图像，见图 129(94 节)．注意当 z 沿曲线 C 接近于 z_0 时，图中倾角 θ_0 和 ϕ_0 分别是 $\arg(z-z_0)$和 $\arg[f(z)-w_0]$的极限．运用(a)中的结果证明 θ_0 和 ϕ_0 满足下列等式

$$\phi_0=m\theta_0+\arg f^{(m)}(z_0).$$

(c)定义 α 为过点 z_0 的光滑曲线 C_1 和 C_2 所成角，如图 130(94 节)中的左图．根据(b)中获得的等式证明曲线 Γ_1 和 Γ_2 在点 $w_0=f(z_0)$所成角为 $m\alpha$(注意当 $m=1$ 时映射在点 z_0 保形，当 $m\geqslant 2$ 时，z_0 是临界点).

97 共轭调和

从 25 节可知，若函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

351

在区域 D 解析，则实值函数 u 和 v 在该区域调和．即它们在区域 D 有连续的一阶偏导和二阶偏导，且满足拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0\quad 和\quad v_{xx}+v_{yy}=0. \tag{1}$$

从前面可知 u 和 v 的一阶偏导满足柯西-黎曼方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x; \tag{2}$$

同 25 节指出的一样，v 称为 u 的共轭调和.

假设 $u(x,y)$为任意给定的在单连通区域(25 节)D 上的调和函数．本节中，我们将通过推导 $v(x,y)$的表达式来证明 $u(x,y)$在区域 D 内总有共轭调和 $v(x,y)$.

为了解决这个问题，我们先回忆高等微积分学中线积分的一些重要事实[⊖]．设 $P(x,y)$和 $Q(x,y)$在 xy 平面内的单连通区域 D 上有一阶连续偏导，(x_0,y_0)和(x,y)为 D 内任意两点．如果在 D 内任意点有 $P_y=Q_x$，则只要积分路径 C 完全落在 D 内，线积分

$$\int_C P(s,t)\mathrm{d}s+Q(s,t)\mathrm{d}t$$

同积分路径的选取无关．当点(x_0,y_0)固定，(x,y)在 D 内变化，则该积分表示 x 和 y 的一个单值函数

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(s,t)\mathrm{d}s+Q(s,t)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

⊖ 参考 W. Kaplan, *Advanced Mathematics for Engineers*, pp. 546-550, 1992.

且其一阶偏导满足

$$F_x(x,y) = P(x,y), \quad F_y(x,y) = Q(x,y). \tag{4}$$

注意当取另一个点(x_0, y_0)时，F 的值相差一个常数.

现在返回到刚开始所给的调和函数 $u(x, y)$，它在 D 内任意一点满足拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$，即

$$(-u_y)_y = (u_x)_x.$$

352 而且，u 的二阶偏导在 D 内连续，也就是说 $-u_y$ 和 u_x 的一阶偏导在 D 内连续. 因此，如果在 D 内固定(x_0, y_0)，函数

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(s,t)\mathrm{d}s + u_s(s,t)\mathrm{d}t \tag{5}$$

在 D 内所有点都有定义；根据等式(4)，我们有

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y), \quad v_y(x,y) = u_x(x,y) \tag{6}$$

即柯西-黎曼方程. 因为 u 的一阶偏导连续，则根据等式(6)易知 v 的导数也连续. 因此(21节)$u(x, y)+iv(x, y)$在 D 内解析；且 v 是 u 的共轭调和.

由等式(5)定义的函数 v 并不是 u 唯一的共轭调和. 函数 $v(x, y)+c$ 也是 u 的共轭调和，其中 c 为任意的实常数. [见 25 节练习 2.]

例 考虑在整个 xy 平面上调和的函数 $u(x, y)=xy$. 根据等式(5)，函数

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -s\mathrm{d}s + t\mathrm{d}t$$

是 $u(x, y)$的一个共轭调和. 这个积分可以通过观察得出结果. 它也可以通过对下面的路径进行积分获得：先对从点(0, 0)到点$(x, 0)$的水平路径进行积分，再对从点$(x, 0)$到点(x, y)的垂直路径进行积分，结果为

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

且相应的解析函数为

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2.$$

98 调和函数的映射

寻找一个在指定区域调和且满足指定边值条件的函数在应用数学中是很重要的. 如果函数在边界上的值给定，则这类问题称为第一类边值问题，或狄利克雷问题. 如果函数在边界上的法向导数给定，则这类问题称为第二类边值问题，或诺伊曼问题. 这两类边值条件的转化和结合也会出现.

353 在应用中所给区域常常是单连通的，且在单连通区域调和的函数通常有共轭调和函数(97节)，这类区域的边值问题的结果是解析函数的实部或虚部.

例 1 在 25 节的例 1 中，我们知道函数

$$T(x,y) = e^{-y}\sin x$$

对带形区域 $0<x<\pi$，$y>0$ 满足一个狄利克雷问题，且它表示一个温度问题的解．函数 $T(x, y)$ 在 xy 平面上调和，显然它是整函数

$$-ie^{iz} = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x.$$

的实部．同时，它也是整函数 e^{iz} 的虚部．

有时给定的边值问题可以通过证明它是一个解析函数的实部或虚部来解决．但是它取决于问题的简单程度和对单变量解析函数的实部和虚部的熟悉程度．下面的定理是一个重要的补充．

定理 *假设解析函数*

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1}$$

把 z 平面内的一个区域 D_z 映射为 w 平面内的一个区域 D_w．如果 $h(u, v)$ 是定义在 D_w 上的调和函数，则函数

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)] \tag{2}$$

在 D_z 上调和．

我们先就区域 D_w 是单连通的情形来证明定理．根据 97 节，D_w 的性质保证所给调和函数 $h(u, v)$ 有共轭调和 $g(u, v)$．因此函数

$$\Phi(w) = h(u,v) + ig(u,v) \tag{3}$$

在 D_w 解析．因为函数 $f(z)$ 在 D_z 解析，所以复合函数 $\Phi[f(z)]$ 在 D_z 解析．因此，复合函数的实部 $h[u(x, y), v(x, y)]$ 在 D_z 调和．

如果 D_w 不是单连通区域，我们知道对 D_w 内任意点 w_0 有邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$ 完全落在 D_w 内．因为该邻域单连通，故式(3)所表示的函数在邻域解析．更一般地，因为 f 在 D_z 内的 z_0 点(其像点为 w_0)连续，则存在邻域 $|z-z_0|<\delta$，其图像落在邻域 $|w-w_0|<\varepsilon$ 内．由此可知 $\Phi[f(z)]$ 在邻域 $|z-z_0|<\delta$ 解析，且我们可以推断出 $h[u(x, y), v(x, y)]$ 在该邻域内调和．最后，因为 w_0 是 D_w 内任意一点，且 D_z 内每一点在映射 $w=f(z)$ 的作用下映射为一个点，所以函数 $h[u(x, y), v(x, y)]$ 在 D_z 调和． [354]

对 D_w 不一定是单连通的一般情形，该定理的证明也可以通过对偏导数运用链式法则直接获得．计算也包含在其中(见 99 节练习 8)．

例 2 函数 $h(u, v)=e^{-v}\sin u$ 在包含上半平面 $v>0$(见例 1)的区域 D_w 上调和．如果映射为 $w=z^2$，则 $u(x, y)=x^2-y^2$ 和 $v(x, y)=2xy$；更多地，z 平面内包含第一象限 $x>0$，$y>0$ 的区域 D_z 映射为 12 节例 3 所示的区域 D_w．因此函数

$$H(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$$

在 D_z 调和．

例 3 函数 $h(u, v)=\mathrm{Im}\,w=v$ 在水平带形区域 $-\pi/2<v<\pi/2$ 上调和．从 88 节例 3 可知，映射 $w=\mathrm{Log}\,z$ 把右半平面 $x>0$ 映为带形区域．因此，通过

$$\mathrm{Log}\,z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\frac{y}{x},$$

其中 $-\pi/2<\arctan t<\pi/2$，我们找到函数

$$H(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$$

在半平面 $x>0$ 上调和.

99 边界条件的映射

通常情况下，较重要的边值条件是通过函数或它的法向导数在调和区域的边界上的值给定的. 本节中，我们将证明部分这些条件在保形映射的作用下保持不变. 这些结果将用于第 10 章解决边值问题. 基本的方法是把 xy 平面内所给的边值问题转化为 uv 平面内更为简单的边值问题，然后利用本节和前面章节中的定理，通过解决简单的问题从而解决原始问题.

355

定理 设映射

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1}$$

在某条光滑曲线 C 上保形，令 Γ 为 C 在该映射下的图像. 如果沿 Γ，函数 $h(u,\ v)$ 满足条件

$$h=h_0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}=0 \tag{2}$$

中的任何一个，其中 h_0 是一个实常数，$\mathrm{d}h/\mathrm{d}n$ 定义为 Γ 的法向导数，那么沿 C，函数

$$H(x,y)=h[u(x,y),v(x,y)] \tag{3}$$

满足相应的条件

$$H=h_0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}N}=0, \tag{4}$$

其中 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}N$ 定义为 C 的法向导数.

为了证明若在 Γ 上满足条件 $h=h_0$，则能推出在 C 上有 $H=h_0$ 成立，我们从等式(3)知在映射(1)下，在 C 上任一点$(x,\ y)$函数 H 的值同 h 在$(x,\ y)$的像点$(u,\ v)$的值相同. 因为像点$(u,\ v)$落在 Γ 且沿曲线 $h=h_0$，所以沿 C 有 $H=h_0$.

另一方面，设沿 Γ 有 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}n=0$. 通过计算，可知

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n}=(\text{grad }h)\cdot\mathbf{n}, \tag{5}$$

其中 grad h 定义为 Γ 上 h 在点$(u,\ v)$的梯度，n 为 Γ 在$(u,\ v)$的单位法向导数. 因为在点$(u,\ v)$，$\mathrm{d}h/\mathrm{d}n=0$，等式(5)告诉我们 grad h 在点$(u,\ v)$和 n 正交. 即 grad h 在该点和 Γ 相切(图 132). 但是梯度是和等高线正交的；又 grad h 和 Γ 相切，所以 Γ 和过点$(u,\ v)$的等高线 $h(u,\ v)=c$ 正交.

根据等式(3)，z 平面内的等高线 $H(x,\ y)=c$ 可以写为

$$h[u(x,y),v(x,y)]=c;$$

显然它在映射(1)下被映射为等高线 $h(u,\ v)=c$. 更多地，因为 C 被映为 Γ，Γ 又同等高线 $h(u,\ v)=c$ 正交，正如前面章节所论证的，从映射(1)在 C 的结构可知，C 在$(u,\ v)$的对应点$(x,\ y)$同等高线 $H(x,\ y)=c$ 正交. 因为梯度总是和等高线正交的，也就是说，grad$H$ 在$(x,\ y)$同 C 相切(见图 132). 如果 N 是 C 在点$(x,\ y)$的单位法向，则 grad$H$ 和 N 正交，即

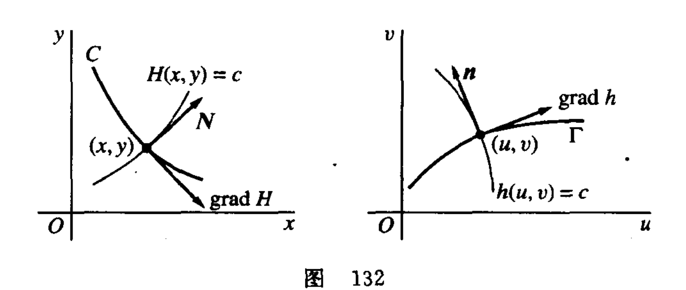


图 132

$$(\mathrm{grad}H)\cdot \boldsymbol{N}=0. \tag{6}$$

最后，由

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}N}=(\mathrm{grad}H)\cdot \boldsymbol{N},$$

从等式(6)可以得出在 C 上各点 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}N=0$.

在本节讨论中，我们默认 grad $h\neq\mathbf{0}$. 如果 grad $h=\mathbf{0}$, 根据后面的练习 10(a)引申出的恒等式

$$|\ \mathrm{grad}H(x,y)\ |=|\ \mathrm{grad}h(u,v)\ \|\ f'(z)\ |,$$

得 $\mathrm{grad}H=\mathbf{0}$；因此 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}n$ 和相应的法向导数 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}N$ 都是零. 我们也可以假设：

(i)grad$h$ 和 grad$H$ 总是存在；

(ii)当 grad$h$ 在点(u, v)不为 0 时，等高线 $H(x, y)=c$ 光滑.

条件(ii)保证如果映射(1)保形，曲线之间的角在映射(1)下保持不变. 在我们的应用中，条件(i)和(ii)总是满足的.

例 考虑函数 $h(u, v)=v+2$. 映射

$$w=iz^2=-2xy+i(x^2-y^2)$$

当 $z\neq 0$ 时保形. 它把半直线 $y=x(x>0)$映射为 u 的负半轴，此时 $h=2$；把 x 正半轴映为 v 的正半轴，此时法向导数 h_u 为 0(图 133). 根据上面的定理，函数

$$H(x,y)=x^2-y^2+2$$

一定满足沿半直线 $y=x(x>0)$时 $H=2$，沿 x 正半轴时 $H_y=0$. 这些都可以直接证明.

356～357

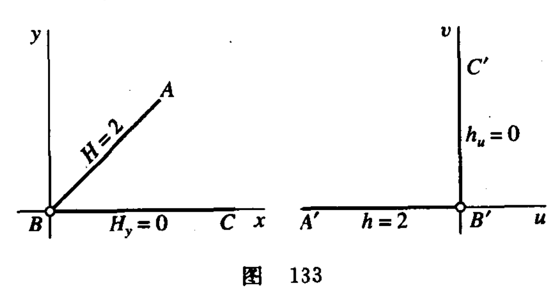


图 133

若边值条件不是定理中提到的那两类中的任何一类，也可以通过映射转化为和原来不同的条件(见练习 6). 映射问题的新边值条件在任何情况下都可通过某一特殊的映射得到. 注意，

在保形映射下，H 在 z 平面内沿光滑曲线 C 的方向导数和 h 在 w 平面上的相应点沿像曲线 Γ 的方向导数的比为 $|f'(z)|$；通常，这个比沿一条给定的曲线并不是一个常值(见练习 10).

练习

1. 利用 97 节表达式(5)，找出调和函数 $u(x, y)=x^3-3xy^2$ 的一个共轭调和函数. 写出关于复变量 z 的解析函数.

2. 令 $u(x, y)$在单连通区域 D 调和. 应用 97 节和 48 节的结果，证明在整个区域内它的各阶偏导都连续.

3. 映射 $w=\exp z$ 把水平带形区域 $0<y<\pi$ 映射为上半平面 $v>0$，参见附录 B 的图 6；且函数

$$h(u,v) = \mathrm{Re}(w^2) = u^2 - v^2$$

在这个半平面调和. 应用 98 节的定理，证明函数 $H(x, y)=e^{2x}\cos 2y$ 在带形区域调和. 直接证明这个结论.

4. 在映射 $w=\exp z$ 下，y 轴上的线段 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 的图像为半圆 $u^2+v^2=1$，$v\geqslant 0$. 函数

$$h(u,v) = \mathrm{Re}\left(2 - w + \frac{1}{w}\right) = 2 - u + \frac{u}{u^2 + v^2}$$

在 w 平面的除去原点的所有点都调和；假定在半圆上 $h=2$. 按照 99 节的定理所定义，写出 $H(x, y)$的一个清楚的表达式. 通过直接证明沿 y 轴的线段 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 有 $H=2$ 来阐述这个定理.

358

5. 映射 $w=z^2$ 把 z 平面的 x 轴、y 轴和原点映为 w 平面内的 u 轴. 考虑调和函数

$$h(u,v) = \mathrm{Re}(e^{-w}) = e^{-u}\cos v,$$

显然它的法向导数 h_v 沿 u 轴为零. 当 $f(z)=z^2$ 时，直接证明 $H(x, y)$的法向导数沿 z 平面的两条正半轴都为零(注意映射 $w=z^2$ 在原点不调和).

6. 用调和函数

$$h(u,v) = \mathrm{Re}(-2iw + e^{-w}) = 2v + e^{-u}\cos v$$

代替练习 5 中的函数 $h(u, v)$. 证明，沿 u 轴 $h_v=2$，但是沿 x 正半轴 $H_y=4x$，沿 y 正半轴 $H_x=4y$. 这表明满足

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n} = h_0 \neq 0$$

这个条件并不一定映为满足 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}N=h_0$ 这个条件.

7. 证明，如果函数 $H(x, y)$是诺伊曼问题(98 节)的一个解，那么，$H(x, y)+A$ 也是这个问题的解，其中 A 是一个实常数.

8. 设解析函数 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$把 z 平面内的区域 D_z 映为 w 平面内的区域 D_w；在 D_w 定义函数 $h(u, v)$，有连续的一阶偏导和二阶偏导. 对偏导数应用链式法则证明，如果 $H(x, y)=h[u(x, y), v(x, y)]$，则

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = [h_{uu}(u,v) + h_{vv}(u,v)]\,|f'(z)|^2.$$

因此，当 $h(u, v)$在 D_w 调和时，函数 $H(x, y)$在 D_z 调和. 这是 98 节定理的另一个证明，即

使区域 D_w 是多连通区域也可以.

9. 设函数 $p(x, y)$在 w 平面的区域 D_w 有连续的一阶导数和二阶导数，且满足泊松方程

$$p_{uu}(u,v) + p_{vv}(u,v) = \Phi(u,v),$$

其中 Φ 是给定的函数. 根据练习 8 获得的恒等式可知，如果解析函数

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

映区域 D_z 为区域 D_w，则函数

$$P(x,y) = p[u(x,y),v(x,y)]$$

359

在 D_z 满足泊松方程

$$P_{xx}(x,y) + P_{yy}(x,y) = \Phi[u(x,y),v(x,y)] \mid f'(z) \mid^2$$

10. 设 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$是保形映射，把光滑曲线 C 保形映射为 w 平面内的光滑曲线 Γ. 令 $h(u, v)$为定义在 Γ 上的函数，且记

$$H(x,y) = h[u(x,y),v(x,y)].$$

(a)通过计算，我们知道 grad$H$ 的 x 部和 y 部分别为偏导 H_x 和 H_y；同样，grad$h$ 的两部分分别为 h_u 和 h_v. 对偏导应用链式法则，且应用柯西-黎曼方程，证明如果(x, y)是 C 上一点，(u, v)是 Γ 的图像，那么

$$\mid \text{grad}H(x,y) \mid = \mid \text{grad}h(u,v) \mid\mid f'(z) \mid.$$

(b)证明从曲线 C 到 grad$H$ 在 C 上点(x, y)的角和从 Γ 到 grad$h$ 在(x, y)的像点(u, v)的角是相同的.

(c)令 s 和 σ 分别表示沿曲线 C 和 Γ 的距离；$\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 为 C 点(x, y)的单位切向量，正向为距离增加的方向. 根据(a)和(b)的结果，并利用

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = (\text{grad}H) \cdot \boldsymbol{t}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\sigma} = (\text{grad}h) \cdot \boldsymbol{\tau},$$

证明方向导数沿曲线 Γ 映为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\sigma} \mid f'(z) \mid.$$

360

第 10 章　保形映射的应用

现在我们将利用保形映射来解决一些物理问题，其中包括含两个独立变量的拉普拉斯方程. 另外，包括热传导问题，电势问题和流体流动问题. 因为这些问题都是阐述一些方法，所以它们都是一些非常基本的问题.

100　稳定温度

在热传导理论中，在固体表面上某一点的流量指的是该点单位时间单位空间沿某一指定方向流动的热量值. 因此流量是用每秒每平方厘米的卡路里这样的物理量来测量的. 用 Φ 定义，且它随该点表面温度 T 的法向导数变化而变化，即

$$\Phi = -K\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}N}\quad (K>0). \tag{1}$$

式(1)称为傅里叶法则，常数 K 称为均匀固体材料的导热系数[⊖].

固体上的点对应于三维空间的直角坐标系中的点，且限定我们的目标仅解决温度 T 沿 x 轴和 y 轴变化的情形. 由于 T 沿垂直 xy 平面的坐标轴不发生变化，所以热流量是二维的且和 xy 平面平行. 进一步说，我们承认流量处于稳定状态，即 T 不随时间变化. 361

假设该固体内没有热量产生或消亡，即没有热源和热漏. 同样，温度函数 $T(x, y)$和它的一阶、二阶偏导在固体内部各点都是连续的. 对热流量的这些陈述和表达式(1)在热传导的数学理论中的基本假设，也是在有连续分布的热源的固体的每一点应用该理论的基本假设.

现在考虑固体内部体积的一个小块，它具有方棱柱形状，它在垂直于 xy 平面上有单位重量，为 Δx 乘 Δy(图 134). 热流量沿通过左手面向右方向的增量是 $-KT_x(x, y)\Delta y$; 沿通过右手面向右的方向的增量是 $-KT_x(x+\Delta x, y)\Delta y$. 由第二个增量减去第一个，我们得到通过这两面的小块的热损失. 这个热流净损失率可以写成

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x,y)-T_x(x,y)}{\Delta x}\right]\Delta x\Delta y,$$

或

$$-KT_{xx}(x,y)\Delta x\Delta y, \tag{2}$$

当 Δx 很小时. 当 Δx 和 Δy 的增量更小时，表达式(2)是一个精确度更高的近似.

类似地，通过其他垂直 xy 平面的面的热损失都可以写成

$$-KT_{yy}(x,y)\Delta x\Delta y. \tag{3}$$

热量流入或流出这个小块仅通过这四个面，且该小块内部的温度保持稳定. 因此表达式(2)和表达式(3)的和为零；即

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0. \tag{4}$$

362

⊖ 该法则以法国材料物理学家约瑟夫·傅里叶(1768—1830)命名. 他的著作中有一个映射，是热传导理论中的一个典型，在附录 A 中有引证.

因此温度函数在该固体内部各点满足拉普拉斯方程.

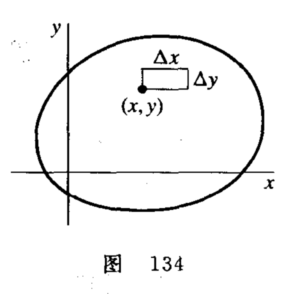


图 134

根据等式(4)和温度函数与它的偏导数的连续性，T 在固体内部的区域内是关于 x 和 y 的调和函数.

表面 $T(x, y)=c_1$ 是固体的等温线，其中 c_1 是任意实常数. 它们也可以看成 xy 平面的曲线；若薄片表面是绝热的，$T(x, y)$可以认为是该平面一个小薄片内一点的温度。即函数 T 的围道是等温线.

T 的梯度在各点和等温线正交，且各点的最大流量是梯度方向. 如果 $T(x, y)$是定义在一个小薄片的温度，S 是函数 T 的共轭调和函数，则曲线 $S(x, y)=c_2$ 在解析函数 $T(x, y)+iS(x, y)$保形的各点与 T 的梯度相切. 曲线 $S(x, y)=c_2$ 称为流线.

如果法向导数 dT/dN 沿这个薄片的边界的各个部分都为零，则通过这些部分的热流为零. 即这些部分绝热的，因此是一条流线.

函数 T 也可以定义为在固体内传播的物质的浓度. 在这种情形下，K 是一个传播常数. 上述的讨论和等式(4)的引申都可以很好地应用于稳定状态的传播.

101 半平面上的稳定温度

现在我们找到一个薄无限半平面 $y\geqslant 0$ 的稳定温度函数 $T(x, y)$，其中该半平面的每个面都是绝热的，且在边 $y=0$ 的除线段 $-1<x<1$ 上温度保持为单位 1 外，其余部分为零(图 135). 函数 $T(x, y)$是受限制的；这个条件是很自然的. 若我们把所给平面看作平面 $0\leqslant y\leqslant y_0$ 的极限情况。在这个平面内满足当 y_0 增加时，上边界保持一个固定温度. 事实上，规定当 y 趋向于无限时 $T(x, y)$接近零是有物理解释的.

所要解决的边界值问题可以写成

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0 \quad (-\infty<x<\infty, y>0), \tag{1}$$

$$T(x,0)=\begin{cases}1, & 当\ |x|<1 \\ 0, & 当\ |x|>1\end{cases} \tag{2}$$

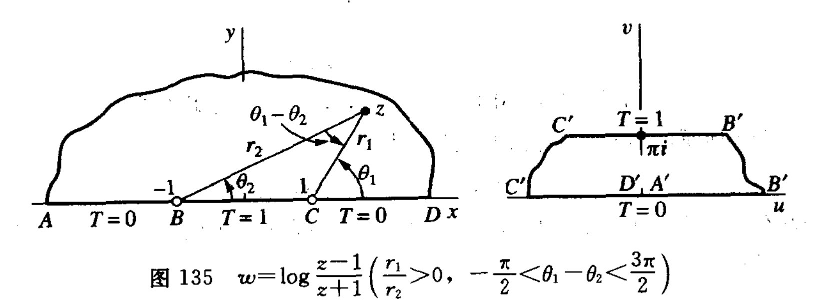


图 135 $w=\log\dfrac{z-1}{z+1}\left(\dfrac{r_1}{r_2}>0, -\dfrac{\pi}{2}<\theta_1-\theta_2<\dfrac{3\pi}{2}\right)$

同样，$|T(x, y)|<M$，M 为某一正常数. 这就是 xy 平面的上半平面的狄利克雷问题. 通过我们的方法将获得一个新的 uv 平面内某区域的狄利克雷问题. 这个区域是上半平面在映射

$w=f(z)$作用下的像，其中 $f(z)$在 $y>0$ 的区域解析且除去没定义的两点$(\pm1, 0)$外，沿边界 $y=0$ 保形．显然寻找一个满足新问题的有界的调和函数是很容易的．第 9 章的两个定理将把 uv 平面内该问题的解转化为 xy 平面内原问题的解．特别地，u 和 v 的一个调和函数将被转化为 x 和 y 的一个调和函数，且 uv 平面内的边界条件和 xy 平面的相应部分相同．因此我们可以用相同的记号 T 定义两个平面的不同温度函数．

记

$$z-1=r_1\exp(i\theta_1) \quad \text{和} \quad z+1=r_2\exp(i\theta_2),$$

其中 $0\leqslant\theta_k\leqslant\pi(k=1, 2)$．映射

$$w=\log\frac{z-1}{z+1}=\ln\frac{r_1}{r_2}+i(\theta_1-\theta_2) \quad \left(\frac{r_1}{r_2}>0, -\frac{\pi}{2}<\theta_1-\theta_2<\frac{3\pi}{2}\right) \tag{3}$$

在上半平面 $y>0$，除两点 $z=\pm1$ 外都有定义，因为在该区域内 $0\leqslant\theta_1-\theta_2\leqslant\pi$(见图 135)．当 $0\leqslant\theta_1-\theta_2\leqslant\pi$ 时对数的值等于主值，而且回忆 88 节的例 3 知上半平面 $y>0$ 映为 w 平面的水平带状区域 $0<v<\pi$．正如例题标注，该映射相应的边界点在附录 B 图 19 中指出．事实上，它正是映射(3)的图像．x 轴上 $z=-1$ 和 $z=1$ 即 $\theta_1-\theta_2=\pi$ 之间的线段被映为带形区域的上边界；x 轴的其余部分即 $\theta_1-\theta_2=0$ 映为带形区域的下边界．所要求的解析性和保形性显然满足．

一个关于 u 和 v 的在带形区域的边 $v=0$ 上为零，在边 $v=\pi$ 上为单位 1 的有界的调和函数显然为

$$T=\frac{1}{\pi}v; \tag{4}$$

它是整函数$(1/\pi)w$ 的虚部，所以调和．根据等式

$$w=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+i\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \tag{5}$$

363～364

映射 x 轴和 y 轴，我们得到

$$v=\arg\left[\frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{(z+1)\overline{(z+1)}}\right]=\arg\left[\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}\right],$$

或者

$$v=\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right).$$

该反正切函数变化范围是 0 到 π，因为

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\theta_1-\theta_2$$

且 $0\leqslant\theta_1-\theta_2\leqslant\pi$．表达式(4)可以改写为

$$T=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) \quad (0\leqslant\arctan t\leqslant\pi). \tag{6}$$

因为表达式(4)在带形区域 $0<v<\pi$ 调和，表达式(3)在半平面 $y>0$ 解析，应用 98 节的定理，我们可以得出结论：函数(6)在半平面调和．这两个调和函数的边界条件在相应的边界上是相同的，因为它们都是 99 节定理中的 $h=h_0$ 类型．因此有界的函数(6)是原问题的解．当

然，我们可以直接证明函数(6)满足拉普拉斯方程，且当点(x, y)从上面接近 x 轴时，函数值接近于图 135 的左图所显示的.

等温线 $T(x, y)=c_1(0<c_1<1)$是圆

$$x^2+(y-\cot\pi c_1)^2=\csc^2\pi c_1$$

上过点$(\pm1, 0)$的曲线，且中心在 y 轴.

最后，我们注意调和函数与常数的乘积仍是一个调和函数，所以函数

$$T=\frac{T_0}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)\quad(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi)$$

表示给定的半平面内的稳定温度，沿 x 轴的线段$-1<x<1$ 的温度 $T=1$ 可以用任何一个常值温度 $T=T_0$ 代替.

102　一个相关问题

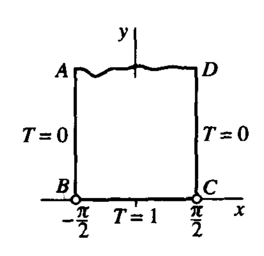


图　136

考虑三维空间中的一个半无限厚片，限制在平面 $x=\pm\pi/2$ 和 $y=0$ 之间，当头两个面的温度保持为零且第三个为单位温度. 我们希望找到温度 $T(x, y)$在该厚片内的任意点的公式. 该问题也就是寻找在一个有半无限带形区域$-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$、$y>0$ 的薄片的温度函数，其中薄片的各个面都是完全绝热的(图 136).

365

该边值问题为 $T(x, y)$，满足

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},y>0\right),\tag{1}$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2},y\right)=T\left(\frac{\pi}{2},y\right)=0\quad(y>0),\tag{2}$$

$$T(x,0)=1\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right),\tag{3}$$

其中 $T(x, y)$有界.

观察 89 节的例 1 或附录 B 的图 9，映射

$$w=\sin z\tag{4}$$

把这个边值问题转化为 101 节中的温度问题(图 135). 因此根据前节的解(6)得

$$T=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2v}{u^2+v^2-1}\right)\quad(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi).\tag{5}$$

等式(4)中的变量转化是

$$u=\sin x\cosh y,\quad v=\cos x\sinh y;$$

调和函数(5)转化为

366

$$T=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2\cos x\sinh y}{\sin^2x\cosh^2y+\cos^2x\sinh^2y-1}\right).$$

因为分母可以简化为 $\sinh^2y-\cos^2x$，所以商可以写为

$$\frac{2\cos x\sinh y}{\sinh^2 y-\cos^2 x}=\frac{2(\cos x/\sinh y)}{1-(\cos x/\sinh y)^2}=\tan 2\alpha,$$

其中 $\tan\alpha=\cos x/\sinh y$. 因此 $T=(2/\pi)\alpha$，即

$$T=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right)\quad\left(0\leqslant\arctan t\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\tag{6}$$

因为讨论范围非负，所以反函数在 0 到 $\pi/2$ 之间变化.

因为 $\sin z$ 是整函数，函数(5)在半平面 $v>0$ 调和，所以函数(6)在带形区域 $-\pi/2<x<\pi/2$, $y>0$ 调和. 同条件当 $|u|>1$、$v=0$ 时 $T=0$ 一样，函数(5)也满足边界条件当 $|u|<1$ 且 $v=0$时 $T=1$. 函数(6)满足边界条件(2)和(3). 而且，在整个带形区域内 $|T(x, y)|\leqslant 1$. 因此表达式(6)也正是所要找的温度公式.

等温线 $T(x, y)=c_1(0<c_1<1)$是该厚块表面

$$\cos x=\tan\left(\frac{\pi c_1}{2}\right)\sinh y$$

的一部分，且各表面都过 xy 平面内的点$(\pm\pi/2, 0)$. 如果 K 是热传导系数，则流入平面 $y=0$ 的面上的热量是

$$-KT_y(x,0)=\frac{2K}{\pi\cos x}\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

流出平面 $x=\pi/2$ 的面上的热量是

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2},y\right)=\frac{2K}{\pi\sinh y}(y>0).$$

本节中的边值问题也可以通过分离变量法解决. 这种方法更直接，但它所给的解是无穷级数的形式[⊖].

367

103 象限中的温度

现在我们寻找在一个薄片的稳定温度，满足在一个平面内在某边的端点绝热，而在该边的其余部分保持一个固定温度，且第二条边保持另一个固定温度. 因为表面绝热，所以该问题是二维的.

选取适当的温度刻度和单位长度使温度函数 T 边值问题满足

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0\quad(x>0,y>0)\tag{1}$$

$$\begin{cases}T_y(x,0)=0, \text{当} 0<x<1\\ T(x,0)=1, \text{当} x>1\end{cases}\tag{2}$$

$$T(0,y)=0\quad(y>0)\tag{3}$$

其中 $T(x, y)$在该象限有界. 平面和它的边界条件如图 137 的左图所示. 条件(2)规定了函数 T 在边界线上一部分的法向导数和另一部分的函数值. 102 节最后提到的分离变量法并不适用

⊖ 相似的问题在 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, *6th ed.*, Problem 7, p. 142, 2001 提到. 在该书第 10 章中有关于边值问题解的唯一性的简短讨论.

于同一边界线上有不同类型条件的问题.

正如附录 B 图 10 所示，映射

$$z = \sin w \tag{4}$$

是从半无限带形区域 $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$、$v \geqslant 0$ 到象限 $x \geqslant 0$、$y \geqslant 0$ 的一一映射. 因为所给的函数是单射且是满射，所以反函数确实存在. 又映射(4)在除点 $w=\pi/2$ 外的带形区域上保形，因此反函数在除点 $z=1$ 外的象限保形. 反函数把 x 轴的线段 $0<x<1$ 映为带形区域的基部，把边界的其余部分映为带形区域的边，如图 137 所示.

因为映射(4)的反函数在除点 $z=1$ 外的象限保形，故要得到所给问题的解可以通过寻找一个在带形区域上调和的函数，它满足图 137 的右图所示的边界条件. 而这些边界条件正是 99 节定理中的 $h=h_0$ 和 $dh/dn=0$ 两个类型.

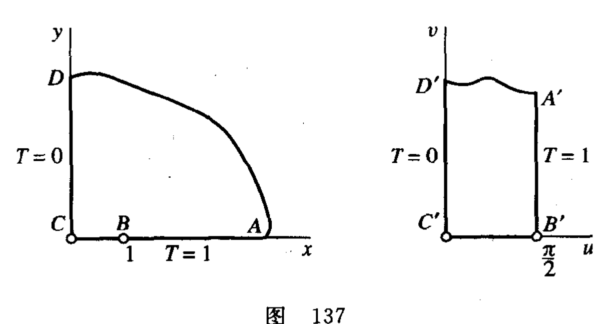


图 137

新边值问题所求的温度函数 T 显然为

$$T = \frac{2}{\pi} u, \tag{5}$$

其中函数 $(2/\pi)u$ 是整函数 $(2/\pi)u$ 的实部. 我们现在需要把 T 用 x 和 y 表示出来.

为了获得 x 和 y 表示的 u，我们注意，根据等式(4)，

$$x = \sin u \cosh v, \quad y = \cos u \sinh v. \tag{6}$$

当 $0<u<\pi/2$ 时，$\sin u$ 和 $\cos u$ 都非零；相应地有

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \tag{7}$$

现在很容易知道，对每个固定的 u，双曲线(7)的焦点为

$$z = \pm\sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = \pm 1,$$

横轴的长度即连接两顶点的线段的长度为 $2\sin u$. 焦点和双曲线上第一象限点 (x, y) 的距离的微分的绝对值是

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sin u.$$

根据等式(6)知，当 $u=0$ 或 $u=\pi/2$ 时这个关系也成立. 利用等式(5)，知所需温度函数为

$$T = \frac{2}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}\right], \tag{8}$$

由于 $0\leqslant u\leqslant\pi/2$，反正弦函数在 0 和 $\pi/2$ 之间变化.

如果我们想证明这个函数满足边界条件(2)，我们一定记得，当 $x>1$ 时 $\sqrt{(x-1)^2}$ 为 $x-1$，当 $0<x<1$ 时 $\sqrt{(x-1)^2}$ 为 $1-x$，平方根为正的. 注意在区域下边界的绝热部分的任意点的温度为

$$T(x,0)=\frac{2}{\pi}\arcsin x \quad (0<x<1).$$

368~369

根据等式(5)知等温线 $T(x, y)=c_1(0<c_1<1)$ 是共焦双曲线(7)落在第一象限且 $u=\pi c_1/2$ 的部分. 由于函数 $(2/\pi)v$ 是函数(5)的共轭调和，固定等式(6)中的 v 为常数，则流线是共焦椭圆的四分之一.

练习

1. 在图 135(101 节)的左图所示的半无限区域问题中，根据 101 节的等式(5)得温度函数 $T(x, y)$ 的一个共轭调和，且找出热量流线. 证明流线包含于 y 轴上半部分和该轴各边上的某些圆的上半部分，其中这些圆的中心落在 x 轴的线段 AB 或 CD 上.

2. 证明若 101 节中的函数 T 不受约束，则该节中的调和函数(4)可以用调和函数

$$T=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi}w+A\cosh w\right)=\frac{1}{\pi}v+A\sinh u\sin v$$

替换，其中 A 为任意实常数. 从而得出结论，uv 平面内的带形区域(图 135)的狄利克雷问题不唯一.

3. 假设 T 的界从 102 节(图 136)的半无限区域的温度问题获得. 证明如果考虑对解加上函数 $A\sin z$ 的虚部，其中 A 是任意实常数，则有无穷解.

4. 利用函数 $\operatorname{Log} z$ 找出在一个区域内有界的稳定温度的表达式，且如果区域的面完全绝热且它的边满足温度 $T(x, 0)=0$ 和 $T(0, y)=1$，该表达式落在区域 $x\geqslant0$、$y\geqslant0$(图 138). 求解等温线和流线，并画出它们的图像.

图 138

答案：$T=\dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

5. 求解一个固体内的稳定温度，其中它的形状为一个长圆柱形楔子，边 $\theta=0$ 和 $\theta=\theta_0(0<r<r_0)$ 的温度分别为常数零和 T_0，且表面 $r=r_0$ $(0<\theta<\theta_0)$ 是完全绝热的(图 139).

答案：$T=\dfrac{T_0}{\theta_0}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

图 139

370

6. 在半无限区域 $y\geqslant0$ 内求解稳定温度，满足在边界 $x<-1(y=0)$ 的部分 $T=0$，在 $x>1(y=0)$ 的部分 $T=1$，且在边界的带形区域 $-1<x<1(y=0)$ 绝热(图 140).

答案：$T=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\left[\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}\right]$ $(-\pi/2\leqslant\arcsin t\leqslant\pi/2)$.

7. 求解区域 $x\geqslant 0$、$y\geqslant 0$ 内的稳定温度，满足在拐角处相同宽度的带形区域上绝热，其余边界面保持固定温度，如图 141 所示.

提示：该问题可以转化为练习 6 中的问题.

答案：

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2}-\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+(2xy)^2}}{2}\right]$$

$$(-\pi/2\leqslant \arctan t\leqslant \pi/2).$$

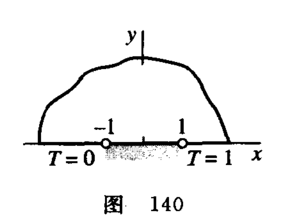


图 140

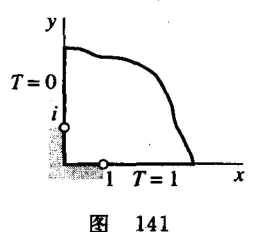


图 141

8. 求解如下半无限平面内带形区域的狄利克雷问题：

$$H_{xx}(x,y)+H_{yy}(x,y)=0\quad(0<x<\pi/2,y>0),$$

$$H(x,0)=0\quad(0<x<\pi/2),$$

$$H(0,y)=1,\quad H(\pi/2,y)=0\quad(y>0),$$

371 其中 $0\leqslant H(x,y)\leqslant 1$.

提示：该问题可以转化为练习 4 中的问题.

答案：$H=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\tanh y}{\tan x}\right)$.

9. 求解在半圆 $r\leqslant 1$、$0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 内绝热的温度函数 $T(r,\theta)$ 的表达式，满足沿射线 $\theta=0(0<r<1)T=1$，在边界的其余部分 $T=0$.

提示：该问题可以转化为练习 8 中的问题.

答案：$T=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{\theta}{2}\right)$.

10. 求解 z 平面内区域 $x\geqslant 0$、$y\geqslant 0$ 的边值问题，满足其表面绝热，边界条件如图 143 所示.

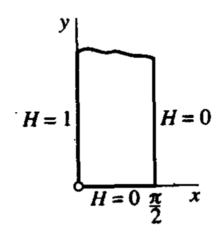


图 142

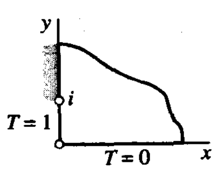


图 143

提示：利用映射

$$w = \frac{i}{z} = \frac{i\bar{z}}{|z|^2}$$

把该问题转化为 103 节(图 137)中的问题.

11. 无限水平区域 $0 \leqslant y \leqslant \pi$ 的边的一部分 $x<0(y=0)$ 和 $x<0(y=\pi)$ 绝热，其表面也绝热. 且当 $x>0$ 时(图 144)，条件 $T(x, 0)=1$ 和 $T(x, \pi)=0$ 满足. 求解该区域内的稳定温度.

提示：该问题可以转化为练习 6 中的问题.

12. 考虑一个薄区域，其表面绝热，形状为包含原点的椭圆的上半部分，焦点为(± 1, 0). 温度在椭圆边界上为 $T=1$. 沿 x 轴的线段 $-1<x<1$ 的温度为 $T=0$，且在 x 轴的其余部分绝热. 通过附录 B 中的图 11 求解热流线. 372

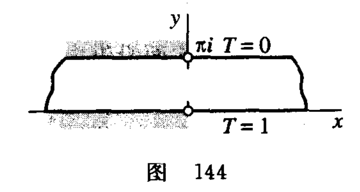


图 144

13. 根据 50 节和该节中的练习 7，如果沿一个封闭区域 R，$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 连续解析，在 R 的内部不为常数，且函数 $u(x, y)$ 在 R 的边界上达到最大值和最小值，在内部不取最大值和最小值. 设 $u(x, y)$ 是稳定温度，解释为什么最大值和最小值保持在边界上.

104 静电位

在静电场中，一点的场强表示作用于该点的单位正电荷的力的矢量. 静电位是空间坐标系中一个纯量函数，满足在任一点，任意方向的方向导数就是场强在这个方向的负值.

对两个具有稳定电荷的粒子，一个粒子施加在另一个粒子的吸引力或排斥力同电量的乘积成正比，同距离的平方成反比. 由平方反比定律，可以证明在单粒子形成的电场中某一点的电势和点与粒子的距离成反比. 在没有电荷的任何区域，由该区域外的电荷产生的电势满足三维空间中的拉普拉斯方程.

如果电势 V 在和 xy 平面平行的所有区域内都是相同的，则在无电荷的区域内 V 是只关于变量 x 和 y 的调和函数：

$$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) = 0.$$

在任一点的场强矢量和 xy 平面平行，x 部和 y 部分别为 $-V_x(x, y)$ 和 $-V_y(x, y)$. 因此该矢量是 $V(x, y)$ 的梯度的负值.

$V(x, y)$ 为常数的面为等势面. 场强在导体表面上一点的切向部分在静力情况下为零，因为在这样的表面移动，电荷不受力. 因此沿导体的表面 $V(x, y)$ 是一个常数，这样的面是等势的. 373

如果 U 是 V 的共轭调和，则 xy 面上的曲线 $U(x, y)=c_2$ 称为势线(flux line). 如果这样的曲线与一个等势线 $V(x, y)=c_1$ 相交于满足解析函数 $V(x, y)+iU(x, y)$ 的导数不为零的

某一点，则这两个曲线在该点相交且场强与势线相切.

电势 V 的边值问题和稳定温度 T 的边值问题是相同的数学问题；同稳定温度一样，复变量的方法限制在二维问题上. 例如 102 节(见图 136)的问题可以转化为寻找空间

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \quad y>0$$

的二维电势问题，其中在导电区间 $x=\pm\pi/2$ 和 $y=0$ 受约束，在其内部绝缘，且在前两个面保持电势为零而第三个面为单位 1.

在一个导电平面内有稳定电流的电势在不是源点和漏点的点是一个调和函数. 重力势是物理上又一个调和函数的例子.

105 圆柱空间中的位势

一个长的中空圆柱由薄的导电材料制成，柱面沿纵向裂成两个相等的部分. 这两部分被绝缘材料制成的薄带子分开，作为电极. 其中一个接地，电势为零，另一个保持一个不同的固定电势. 如图 145 左图所示建立坐标轴和单位长度及电势差. 然后我们再把任意和柱面边缘分离的封闭空间电势 $V(x, y)$转化为 xy 平面的圆 $x^2+y^2=1$ 内的调和函数. 注意在圆的上半部分 $V=0$，在下半部分 $V=1$.

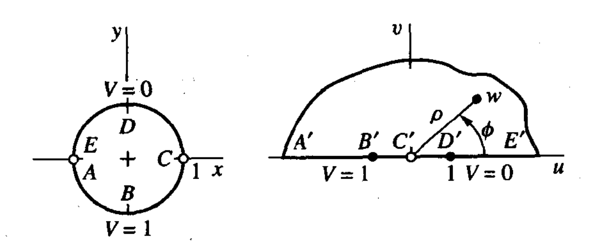


图 145

一个线性分数映射把上半平面映为中心在原点的单位圆的内部，其中正实轴映为圆的上半部分，负实轴映为圆的下半部分. 在 88 节练习 1 中已经证明. 这个结果在附录 B 的图 13 给出；交换 z 和 w，可以知道映射

374

$$z=\frac{i-w}{i+w} \tag{1}$$

的逆给出了半平面内 V 的一个新问题，如图 145 的右图所示.

函数

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Log}w=\frac{1}{\pi}\ln\rho+\frac{i}{\pi}\phi \quad (\rho>0, 0\leqslant\phi\leqslant\pi) \tag{2}$$

的虚部是 u 和 v 的一个有界函数，假设在 u 轴的两部分 $\phi=0$ 和 $\phi=\pi$ 为常值. 因此这个半平面的调和函数为

$$V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{v}{u}\right), \tag{3}$$

其中反函数的值在 0 到 π 之间变化.

映射(1)的逆为

$$w = i\frac{1-z}{1+z}, \tag{4}$$

因此 u 和 v 可以用 x 和 y 表示. 等式(3)变为

$$V = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right) \quad (0 \leqslant \arctan t \leqslant \pi). \tag{5}$$

函数(5)是被柱形电极封闭的区域内的势函数，因为它在圆内调和，且在半圆满足所需的值. 若我们想证明这个结果，要注意

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \arctan t = 0 \quad 和 \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \arctan t = \pi.$$

在柱形区域的等势线 $V(x, y)=c_1(0<c_1<1)$ 是圆

$$x^2 + (y + \tan\pi c_1)^2 = \sec^2\pi c_1$$

的弧线，其中每个圆都过点$(\pm 1, 0)$. 同样，x 轴上这两点之间的连线是等势线 $V(x, y)=1/2$. V 的一个共轭调和 U 是 $-(1/\pi)\ln\rho$，或者是函数 $-(i/\pi)\mathrm{Log}w$ 的虚部. 根据等式(4)，U 可表示为

375

$$U = -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|.$$

从这个等式可以看出势线 $U(x, y)=c_2$ 是中心在 x 轴的圆的弧线. y 轴上两电极之间的连线也是势线.

练习

1. 105 节的调和函数(3)在半平面 $v\geqslant 0$ 有界，且满足图 145 的右图所示的边界条件. 证明如果把 Ae^w 的虚部添加到那个函数上，则所得结果满足所需全部条件，其中 A 为任意实数.

2. 105 节的映射(4)把图 145 的左图所示的圆的上半部分映为 w 平面的第一象限，直径 CE 映为 v 的正半轴. 求解半柱面 $x^2+y^2=1$、$y\geqslant 0$ 和平面 $y=0$ 围成的封闭空间的电势 V，满足在柱面 $V=0$，在平面的表面 $V=1$(图 146).

图 146

答案：$V=\dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{2y}\right)$.

3. 求解空间 $0<r<1$、$0<\theta<\pi/4$ 的电势 $V(r, \theta)$，其中在半平面 $\theta=0$、$\theta=\pi/4$ 和柱形表面 $r=1$ 的 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ 的部分受约束，且在平面表面 $V=1$，在柱形表面 $V=0$(见练习 2). 证明获得的函数满足边界条件.

4. 注意除原点外调和的函数 $\log z$ 的所有分支有相同的实部. 写出共轴导电柱形表面 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2={r_0}^2(r_0\neq 1)$之间的空间内的电势 $V(x, y)$，其中在第一个表面 $V=0$，在第二个表面 $V=1$.

答案：$V=\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{2\ln r_0}$.

5. 求解空间 $y>0$ 的电势 $V(x, y)$，其中在无限导电平面 $y=0$ 上，带状区域$(-a<x<a, y=0)$和该平面的其余部分绝缘，且保持电势 $V=1$，在其余部分 $V=0$(图 147). 证明获得的函数满足边界条件.

376

答案：$V=\dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\right)\quad(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi)$.

6. 求解图 148 所示的半无限空间的电势，其中在两个半平面和一个半柱面受约束，且在柱形表面 $V=1$，在平面表面 $V=0$. 在 xy 平面内画出一些等势线.

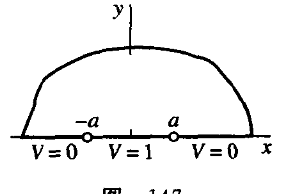


图 147

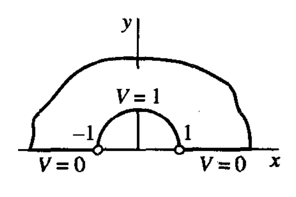


图 148

答案：$V=\dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$.

7. 求解平面 $y=0$ 和 $y=\pi$ 之间的空间的电势 V，满足在 $x>0$ 的部分 $V=0$，在 $x<0$ 的部分 $V=1$(图 149). 用边界条件检验所得结果.

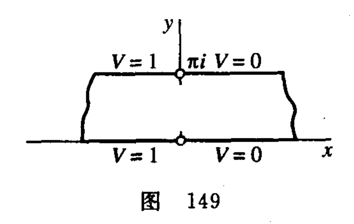


图 149

答案：$V=\dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{\sin y}{\sinh x}\right)\quad(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi)$.

8. 求解长柱形 $r=1$ 内部空间的电势 V，满足在柱形表面的第一个四分之一$(r=1, 0<\theta<\pi/2)$上 $V=0$，在表面的其余部分$(r=1, \pi/2<\theta<2\pi)$上 $V=1$(见 88 节的练习 5 和图 110). 证明在柱面的轴上 $V=3/4$. 用边界条件检验所得结果.

9. 利用附录 B 的图 20 求解温度函数 $T(x, y)$，满足在所示的 xy 平面上的阴影区域内调和，且假设沿曲线 ABC，$T=0$；沿线段 DEF，$T=1$. 证明所得函数满足边界条件(见练习 2).

377

10. 矩形区域内 V 的狄利克雷问题

$$V_{xx}(x,y)+V_{yy}(x,y)=0\quad(0<x<a, 0<y<b),$$
$$V(x,0)=0,\quad V(x,b)=1\quad(0<x<a),$$
$$V(0,y)=V(a,y)=0\quad(0<y<b)$$

可通过分离变量法解决[⊖]. 结果为

$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(m\pi y/a)}{m\sinh(m\pi b/a)}\sin\frac{m\pi x}{a}\quad(m=2n-1).$$

把该结果用到 uv 平面的一个问题，求解空间 $1<r<r_0$、$0<\theta<\pi$ 的势 $V(r,\theta)$，要满足在边界 $\theta=\pi$ 上 $V=1$，在边界的其余部分 $V=0$(图 150).

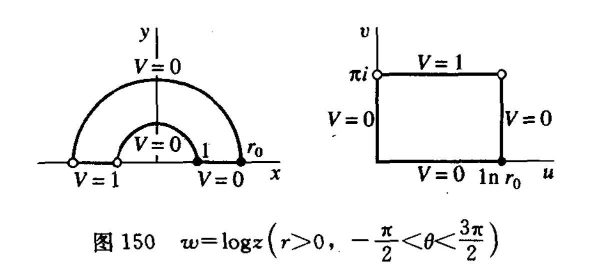


图 150　$w=\log z\left(r>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$

答案:

$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(\alpha_n\theta)}{\sinh(\alpha_n\pi)}\cdot\frac{\sin(\alpha_n\ln r)}{2n-1}\left[\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{\ln r_0}\right].$$

11. 利用练习 10 中获得的矩形区域

$$0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b$$

的狄利克雷问题的解，求解空间

$$1<r<r_0,0<\theta<\pi$$

的势 $V(r,\theta)$，满足在边界 $r=r_0$、$0<\theta<\pi$ 上 $V=1$，在其余部分 $V=0$(图 151).

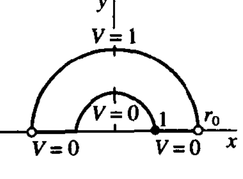


图 151

答案:

$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^m-r^{-m}}{r_0^{\,m}-r_0^{-m}}\right)\frac{\sin m\theta}{m}\quad(m=2n-1).$$

[378]

106　二维的流体流动

在流体力学和空气动力学中，调和函数是十分重要的. 我们现在只考虑二维稳定类型的问题. 即假设在平行于 xy 平面的平面内流体的运动是相同的，流速平行于这个平面且与时间无关. 这样只需考虑 xy 平面流体的一个小薄片的运动就足够了.

我们把用矢量表示的复数

$$V=p+iq$$

定义为流体的粒子在任一点 (x,y) 的速度；因此速度矢量的 x 部和 y 部分别用 $p(x,y)$ 和

⊖ 见作者的 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed., pp. 135-137 and 185-187, 2001.

$q(x, y)$表示．在无源和无漏的区域内的点，实值函数 $p(x, y)$和 $q(x, y)$及它们的一阶偏导都设为连续的．

沿任意围道 C 的流体环流定义为速度切线部分 $V_T(x, y)$沿 C 关于弧长 σ 的线积分：

$$\int_C V_T(x,y)\mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

沿 C 的环流和 C 的长度的比率就是沿围道流体的平均速度．在高等微积分学中已知线积分可以写为[⊖]

$$\int_C V_T(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_C p(x,y)\mathrm{d}x + q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

379 当 C 是无源和无漏的单连通区域内一条定义了正方向的简单封闭围道时，格林公式(44 节)可以写为

$$\int_C p(x,y)\mathrm{d}x + q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_R [q_x(x,y) - p_y(x,y)]\mathrm{d}A,$$

其中 R 是包含 C 内部和边界点的封闭区域．因此对这样的围道有

$$\int_C V_T(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_R [q_x(x,y) - p_y(x,y)]\mathrm{d}A \tag{3}$$

上述沿简单封闭围道 C 环流的表达式(3)右边的被积函数的物理解释已经给出．定义 C 为以点(x_0, y_0)为圆心 r 为半径的圆，逆时针为正方向．沿 C 的平均速度为环流除以圆周长 $2\pi r$，且相应的流体关于圆点的平均角速度为平均速度除以 r：

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_R \frac{1}{2}[q_x(x,y) - p_y(x,y)]\mathrm{d}A.$$

这也是函数

$$\omega(x,y) = \frac{1}{2}[q_x(x,y) - p_y(x,y)] \tag{4}$$

在以 C 为边界的区域内的平均值．当 r 趋近于零时，它的极限就是 w 在点(x_0, y_0)的值．因此函数 $\omega(x, y)$称为流体的旋转，表示当圆收缩向圆点时角速度的极限，其中在圆点 w 是可求的．

如果在某单连通区域的每一点有 $\omega(x, y)=0$，则流体在该区域为不旋转的．我们仅考虑不旋转的流，且假定流体不可压缩且无粘性．在假定的不旋转的稳定流体流动中有唯一的密度 ρ，这可根据流体压力 $P(x, y)$满足伯努利方程的特殊形式

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}|V|^2 = \text{常量}$$

获得．注意，当速度 $|V|$ 最小时，压力最大．

设 D 为单连通区域，流体在其中不旋转．根据等式(4)，在 D 内 $p_y = q_x$．两偏导之间的关系表明沿 D 内围道 C 或连接 D 内两点(x_0, y_0)和(x, y)的线积分

⊖ 在本节和下节中都用到了线积分的性质，可参考 W. Kaplan，*Advanced Mathematics for Engineers*，Chap. 10，1992.

$$\int_C p(s,t)\mathrm{d}s + q(s,t)\mathrm{d}t$$

380

与路径无关．因此，如果(x_0, y_0)固定，函数

$$\phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p(s,t)\mathrm{d}s + q(s,t)\mathrm{d}t \tag{5}$$

在 D 内有定义；对等式两边取偏导，得

$$\phi_x(x,y) = p(x,y), \phi_y(x,y) = q(x,y). \tag{6}$$

根据等式(6)，速度矢量 $V=p+iq$ 是 ϕ 的梯度；在任一方向上 ϕ 的方向导数为流速在该方向上的分量．

函数 $\phi(x, y)$称为**速度势**．根据等式(5)知，当点(x_0, y_0)变化时，$\phi(x, y)$只需增加一个常数．水平曲线 $\phi(x, y)=c_1$ 称为**等势的**，因为它是 $\phi(x, y)$的梯度，在任一 V 不是零矢量的点，速度矢量 V 是等势线的法线．

如同热流一样，不可压缩的流体流入或流出某体积只能通过该体积的边界，这个条件要求 $\phi(x, y)$在无流源无漏槽的区域满足拉普拉斯方程

$$\phi_{xx}(x,y) + \phi_{yy}(x,y) = 0.$$

利用等式(6)和函数 p、q 及它们的一阶偏导的连续性，可以知道 ϕ 的一阶和二阶偏导在该区域连续．因此速度势 ϕ 在该区域是一个**调和函数**．

107　流函数

根据 106 节，速度矢量

$$V = p(x,y) + iq(x,y) \tag{1}$$

在不旋转的单连通区域可以写为

$$V = \phi_x(x,y) + i\phi_y(x,y) = \mathrm{grad}\phi(x,y), \tag{2}$$

其中 ϕ 是速度势．当速度矢量不是零矢量时，它是过点(x, y)的等势线的法线．如果 $\psi(x, y)$为 $\phi(x, y)$的共轭调和(见 97 节)，则速度矢量和曲线 $\psi(x, y)=c_2$ 相切．曲线 $\psi(x, y)=c_2$ 称为**流线**，函数 ψ 称为**流函数**．特别地，流体不能流过的边界也是一条流线．

381

解析函数

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

称为流体的**复势**．注意，

$$F'(z) = \phi_x(x,y) + i\psi_x(x,y),$$

或利用柯西-黎曼方程，

$$F'(z) = \phi_x(x,y) - i\phi_y(x,y).$$

速度的表达式(2)因此可以表示为

$$V = \overline{F'(z)}. \tag{3}$$

速率或速度的大小为

$$|V|=|F'(z)|.$$

根据 97 节等式(5)，如果 ϕ 是单连通区域 D 的调和函数，则 ϕ 的共轭调和可以写为

$$\psi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\phi_t(s,t)\mathrm{d}s+\phi_s(s,t)\mathrm{d}t,$$

其中积分与路径无关. 利用 106 节的等式(6)得

$$\psi(x,y)=\int_C-q(s,t)\mathrm{d}s+p(s,t)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中 C 是 D 内从 $(x_0,\ y_0)$ 到 $(x,\ y)$ 的任意围道.

高等微积分学中指出，等式(4)的右边部分表示沿 C 关于弧长 σ 的积分，其中 C 是 x 部和 y 部分别为 $p(x,\ y)$ 和 $q(x,\ y)$ 的向量的法向部分 $V_N(x,\ y)$. 因此表达式(4)可以写为

$$\psi(x,y)=\int_C V_N(s,t)\mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

$\psi(x,\ y)$ 表示过 C 的流体流动速率的倍数. 特别地，$\psi(x,\ y)$ 定义为单位体积流过垂直 xy 平面的曲线 C 上的单位高度的速率.

例 当复势为函数

382

$$F(z)=Az, \tag{6}$$

其中 A 是一个正实数，

$$\phi(x,y)=Ax \quad 和 \quad \psi(x,y)=Ay. \tag{7}$$

流线 $\psi(x,\ y)=c_2$ 是水平线 $y=c_2/A$，且在任一点的速度是

$$V=\overline{F'(z)}=A.$$

满足 $\psi(x,\ y)=0$ 的点 $(x_0,\ y_0)$ 是 x 轴的任意点. 若以 $(x_0,\ y_0)$ 为原点，则 $\psi(x,\ y)$ 为流过连接原点和点 $(x,\ y)$ 的任意围道的速率(图 152). 这个流动是一致向右的. 它可以看作以 x 轴为边的上半平面的一致流动，其中 x 轴为一条流线；或看作平行线 $y=y_1$ 和 $y=y_2$ 之间的一致流动.

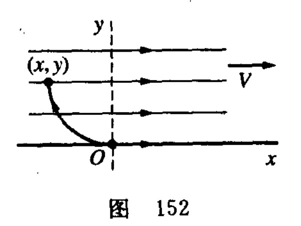


图 152

流函数 ψ 刻画了一个区域的流动. 对给定的区域在不考虑一个比例因子或一个常数的区别时，是否只存在一个这样的函数，这个问题并没有解决. 在下面的一些例子中，速度在远离障碍物时是唯一的；或在第 11 章包含源点和漏点时，这种物理情形表明由问题所给的条件唯一确定.

一个调和函数不总是唯一确定的，即使加上一个常数因子，如果只是简单的在区域边界给定它的值．在这个例子中，函数 $\psi(x, y)=Ay$ 在半平面 $y>0$ 调和，且在边界为零．函数 $\psi_1(x, y)=Be^x\sin y$ 也满足这些条件．尽管如此，流线 $\psi_1(x, y)=0$ 不仅包含直线 $y=0$，还包含直线 $y=n\pi(n=1, 2, \cdots)$．函数 $F_1(z)=Be^z$ 是在 $y=0$ 和 $y=\pi$ 之间的带形区域内流动的复势，其中两条边界线构成流线 $\psi(x, y)=0$；如果 $B>0$，则流体沿下边的线向右流动，沿上边的线向左流动．

108 绕拐角和柱面的流动

当分析在 xy 平面或 z 平面的流动时，通常考虑 uv 或 w 平面的相应流动会更简单．如果 ϕ 是 uv 平面的速度势，ψ 是 uv 平面的流函数，98 节和 99 节的结果可以应用于这些调和函数． 383
即如果 uv 平面的流动区域 D_w 是区域 D_z 在函数

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

作用下的像，其中 f 解析，则函数

$$\phi[u(x,y),v(x,y)] \quad 和 \quad \psi[u(x,y),v(x,y)]$$

在 D_z 调和．这个新函数可以看作是 xy 平面的速度势和流函数．uv 平面的流线或自然边界 $\psi(u, v)=c_2$ 对应于 xy 平面的流线或自然边界 $\psi[u(x, y), v(x, y)]=c_2$．

利用这种技巧，很容易地可以先写出 w 平面的区域的复势函数，然后获得 xy 平面内相应的速度势和流函数．更严格地说，如果 uv 平面的势函数为

$$F(w) = \phi(u,v) + i\psi(u,v),$$

则复合函数

$$F[f(z)] = \phi[u(x,y),v(x,y)] + i\psi[u(x,y),v(x,y)]$$

表示 xy 平面的复势．

为避免使用太多的符号，我们使用 F，ϕ 和 ψ 来表示 xy 平面和 uv 平面的复势．

例 1 考虑第一象限 $x>0$，$y>0$ 的流动，平行于 y 轴向下，且在接近原点处拐一个直角，如图 153 所示．为了确定流动，回忆(12 节例 3)映射

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

把第一象限映为 uv 平面的上半平面，象限的边界映为整条 u 轴．

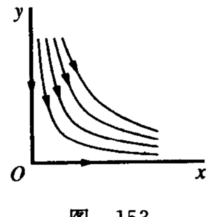


图 153

384

从 107 节的例子中我们可知一个在 w 平面的上半部分一致向右的流动的复势是 $F=Aw$，

其中 A 是一个正实常数. 所以象限的势是

$$F = Az^2 = A(x^2 - y^2) + i2Axy; \tag{1}$$

且其流函数是

$$\psi = 2Axy. \tag{2}$$

显然，流函数在第一象限调和，在边界上为零.

流线是长方形双曲线

$$2Axy = c_2.$$

的分支. 根据 107 节等式(3)，流体的速度为

$$V = \overline{2Az} = 2A(x - iy).$$

观察知粒子的速率

$$|V| = 2A\sqrt{x^2 + y^2}$$

和到原点的距离成比例. 流函数(2)在点(x, y)的值可以看作穿过从原点延伸到该点的线段的流速.

例 2 设以单位长度为半径的长圆柱放在一个足够大的流体中，该流体有一致的速度，且柱面的轴和流动方向垂直. 为了确定绕柱面的稳定流，我们用圆 $x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱，令流动平行于 x 轴且向右流动(图 154). 根据对称性，x 轴上圆外的点可以看作边界点，因此我们只需考虑流动区域的上半部分.

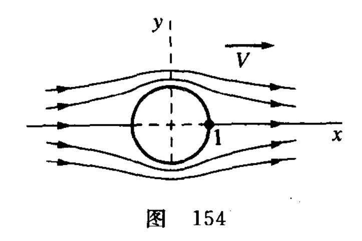


图 154

流动区域的边界，包含上半圆和 x 轴上圆外的点. 在映射

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

[385] 的作用下，边界映为整个 u 轴. 区域本身映为上半平面 $v \geqslant 0$，如附录 B 图 17 所示. 与那个半平面相应的一致流动的复势是 $F = Aw$，其中 A 是一个正实常数. 因此在圆外且在 x 轴上部的区域的复势为

$$F = A\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{3}$$

当 $|z|$ 增大时，速度

$$V = A\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right) \tag{4}$$

趋于 A. 因此流动在远离圆的点几乎一致且平行于 x 轴. 从等式(4)知 $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$；因此该表

达式也表示下边区域的流动速度，其中下半圆为一条流线.

根据等式(3)，在极坐标系下，所给问题的流函数为

$$\psi = A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta. \tag{5}$$

流线

$$A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = c_2$$

关于 y 轴对称，且其渐近线平行于 x 轴. 注意当 $c_2=0$ 时，流线包含圆 $r=1$ 和在圆外 x 轴上的部分.

练习

1. 解释为什么速度的各部分可以通过等式

$$p(x,y) = \psi_y(x,y), \quad q(x,y) = -\psi_x(x,y).$$

从流函数获得？

2. 在流动区域的一个内点，在我们的假设下，流体压力不可能比该点一个邻域内的其他点的压力小. 利用 106 节、107 节和 50 节，证明这个结论.

3. 108 节例 1 所描述的绕直角的流动，在区域 $x\geqslant0$、$y\geqslant0$ 内的哪点流体压力最大？

4. 证明在 108 节例 2 中圆柱表面的各点，流体的速率是 $2A|\sin\theta|$，且在柱面上的流体压力在点 $z=\pm1$ 最大，在点 $z=\pm i$ 最小. 386

5. 写出绕柱面 $r=r_0$ 的流动的流势，满足当点靠近柱面时，V 在点 z 趋向于一个实常数 A.

6. 证明角形区域 $r\geqslant0$、$0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$(图 155)的流动的流函数为

$$\psi = Ar^4\sin4\theta,$$

画出该区域内的一些流线.

7. 证明半无限区域 $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$、$y\geqslant0$(图 156)的流动的复势为 $F=A\sin z$. 写出流线的等式.

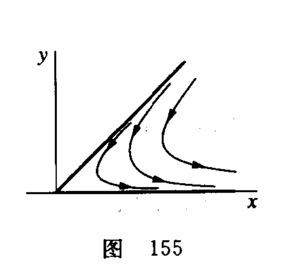


图 155

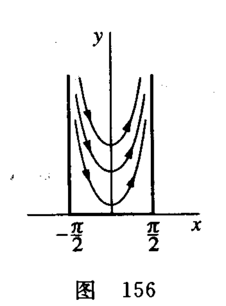


图 156

8. 证明如果区域 $r\geqslant r_0$ 的流动的速度势为 $\phi=A\ln r(A>0)$，则流线是半直线 $\theta=c(r\geqslant r_0)$，通过每个以原点为圆心的完整的圆的流动速率都是 $2\pi A$，而这为对应于原点之流源的大小.

9. 证明区域 $r\geqslant1$、$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 的流动的复势为

$$F=A\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right),$$

写出 V 和 ψ 的表达式. 注意速率 $|V|$ 沿区域的边界如何变化，且证明在边界上 $\psi(x,y)=0$.

10. 设距离 108 节例 2 中的单位半径的柱面无限远的流动在和 x 轴成一定角度 α 的方向上一致；即

387

$$\lim_{|z|\to\infty}V=Ae^{i\alpha}\quad(A>0).$$

求解复势.

答案：$F=A\left(ze^{-i\alpha}+\dfrac{1}{z}e^{i\alpha}\right)$.

11. 记

$$z-2=r_1\exp(i\theta_1),\quad z+2=r_2\exp(i\theta_2),$$

和

$$(z^2-4)^{1/2}=\sqrt{r_1r_2}\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right),$$

其中

$$0\leqslant\theta_1<2\pi\quad 和\ 0\leqslant\theta_2<2\pi.$$

则函数 $(z^2-4)^{1/2}$ 单值且解析，除去包含 x 轴上连接点 $z=\pm2$ 的线段的支割线. 从 85 节练习 13 知，映射

$$z=w+\frac{1}{w}$$

把圆 $|w|=1$ 映为从 $z=-2$ 到 $z=2$ 的线段，且把圆外区域映为 z 平面的其余部分. 利用前面观察到的证明，在 $|w|>1$ 且不属于支割线的所有点，逆映射可以记为

$$w=\frac{1}{2}[z+(z^2-4)^{1/2}]=\frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2}+\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)^2.$$

映射和逆映射在这两个平面的点之间是一一的.

12. 利用练习 10 和 11 的结论，证明，绕宽为 4、横截面为连接两点 $z=\pm2$ 的线段的长区域(图 157)的稳定流的复势为表达式

$$F=A[z\cos\alpha-i(z^2-4)^{1/2}\sin\alpha].$$

假设距离这个区域无限远的流体的速度是 $A\exp(i\alpha)$. $(z^2-4)^{1/2}$ 的分支就是练习 11 所描述的那个，其中 $A>0$.

13. 证明练习 12 中如果 $\sin\alpha\neq0$，则沿连接两点 $z=\pm2$ 的线段的流体速度在终点无限，在中点等于 $A|\cos\alpha|$.

14. 为了简单，假设练习 12 中 $0<\alpha\leqslant\pi/2$. 证明沿线段的上边区域(图 157)，流体的速度在点 $x=2\cos\alpha$ 为零；沿线段的下边区域，流体的速度在点 $x=-2\cos\alpha$ 为零.

15. 中心在 x 轴上一点且过点 $z=-1$ 的圆依照映射

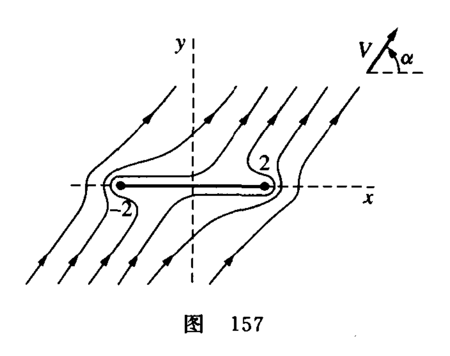


图 157

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

个别的非零点 z 可以几何映射为增加的顶点

$$z = re^{i\theta} \quad 和 \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

通过映一些点表明圆的图像是图 158 所示类型的剖面，且圆外的点映为剖面外部的点. 这是茹可夫斯基翼剖面的一个特例(见下面的练习 16 和 17).

16. (a)证明练习 15 的圆的映射除点 $z=-1$ 外保形.

(b)令复数

$$t = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{|\Delta z|} \; 和 \quad \tau = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$

分别表示在点 $z=-1$ 和光滑有向弧相切的单位向量以及该弧在映射 $w=z+(1/z)$ 的图像. 证明 $\tau=-t^2$，且图 158 的茹可夫斯基剖面在点 $w=-2$ 有一个尖，在尖端两切线的夹角为零.

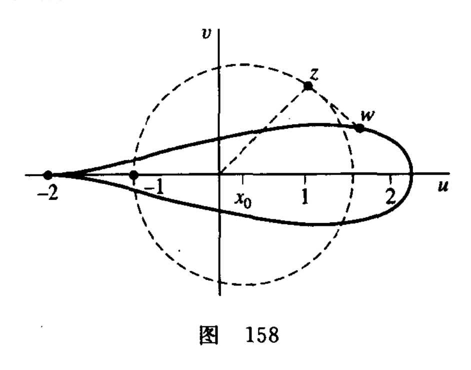


图 158

388 ~ 389

17. 求解绕练习 15 中的机翼形区域的流动的复势，满足在距离原点无限远的流体的速度 V 是实常数 A. 回忆练习 15 给出的映射

$$w = z + \frac{1}{z}$$

的逆映射，即交换 z 和 w(见练习 11).

18. 注意在映射 $w=e^z+z$ 作用下，两半轴 $x\geqslant 0$，$y=\pi$ 和 $x\leqslant 0$，$y=\pi$ 映为半直线 $v=\pi(u\leqslant$

-1)；带形区域$-\pi\leqslant y\leqslant\pi$映为 w 平面. 注意方向的变化，当 x 趋近于$-\infty$，$\arg(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)$在这个映射下趋近于零. 证明流过由 w 平面的半直线形成的开放通道(图 159)的流体的流线是该带形区域内的直线 $y=c_2$ 的图像. 这些流线也表示静电力场中两平行电容器边缘的等势线.

390

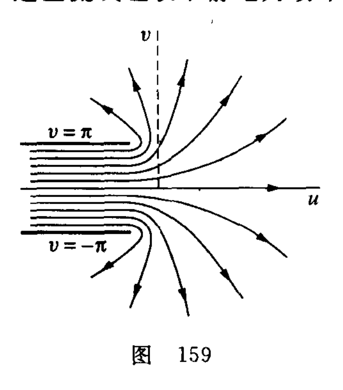


图 159

第 11 章　施瓦兹-克里斯托费映射

本章介绍施瓦兹-克里斯托费映射，它把 x 轴和 z 平面的上半部分映为 w 平面给定的封闭多边形和它的内部. 然后应用它构造流体流动和电势理论.

109　将实轴映射为多边形

用复数 t 表示和光滑弧 C 相切于点 z_0 的单位向量，τ 表示单位向量，是 C 在映射 $w=f(z)$ 作用下相切于对应点 w_0 的图像 Γ. 假定 f 在点 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$. 根据 94 节，我们有

$$\arg\tau = \arg f'(z_0) + \arg t. \tag{1}$$

特别地，如果 C 是 x 轴上正方向向右的一段，则在 C 上每一点 $z_0=x$ 有 $t=1$ 和 $t=0$. 在这种情形下，等式(1)变为

$$\arg\tau = \arg f'(x). \tag{2}$$

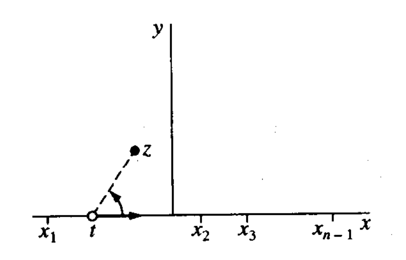
如果 $f'(z)$沿这一段保持辐角为常数，则 $\arg\tau$ 为常数. 因此 C 的图像 Γ 也是直线上的一段.

现在我们构造映射 $w=f(z)$，它映整个 x 轴为 n 多边形，其中轴上的点 x_1、x_2、…、x_{n-1} 和∞的图像为多边形的顶点，且

391

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}.$$

顶点为 $w_j=f(x_j)(j=1, 2, 3, \cdots, n-1)$和 $w_n=f(\infty)$. 当 z 在 x 轴上移动时，在点 $z=x_j$ 处 $\arg f'(z)$从一个常值变为另一个常值(图 160).



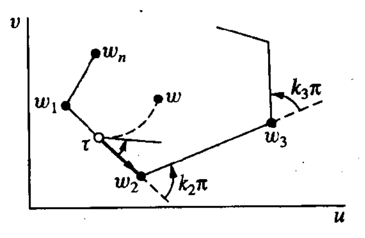


图　160

如果函数 f 满足

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}}, \tag{3}$$

其中 A 是一个复常数，k_j 是一个实常数，$\forall j=1, 2, \cdots, n-1$ 且当 z 为实数时，$f'(z)$的辐角按指定的方式变化；式子(3)的辐角可以写为

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1\arg(z-x_1) - k_2\arg(z-x_2) - \cdots - k_{n-1}\arg(z-x_{n-1}). \tag{4}$$

当 $z=x$ 且 $x<x_1$ 时，

$$\arg(z-x_1) = \arg(z-x_2) = \cdots = \arg(z-x_{n-1}) = \pi.$$

当 $x_1<x<x_2$ 时，辐角 $\arg(z-x_1)$为零，而其余辐角为 π. 根据等式(4)，当 z 通过点 x_1 向右

移动时，$\arg f'(z)$突然增加 $k_1\pi$. 同样，当 z 通过点 x_2 时，它突然增加 $k_2\pi$，等等.

利用等式(2)，当 z 从 x_{j-1} 移向 x_j 时在其方向上的单位向量 τ 是一个常数；因此点 w 沿直线的固定方向移动. 在点 x_j 的像点 w_j，τ 的方向突然改变 $k_j\pi$，如图 160 所示. 这些角度 $k_j\pi$ 是点 w 描述的多边形的外角.

外角限制在 $-\pi$ 到 π 之间，当 $-1<k_j<1$ 时. 假定多边形的边不相互相交，且给多边形定义一个正的(逆时针)方向. 则一个封闭多边形的外角和为 2π；点 $z=\infty$ 的像点 w_n 的外角为

392

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi.$$

因此 k_j 一定满足条件

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n = 2, \quad -1 < k_j < 1 \quad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{5}$$

注意 $k_n=0$ 如果

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2. \tag{6}$$

也就是说，τ 的方向在点 w_n 不变. 所以 w_n 不是顶点，多边形只有 $n-1$ 条边.

导函数满足等式(3)的映射 f 的存在性在下节中确定.

110 施瓦兹-克里斯托费映射

函数的导函数表达式(109 节)

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \tag{1}$$

映 x 轴为一个多边形. 令因子$(z-x_j)^{-k_j}$表示以 x 轴下方为支割线的幂函数的分支. 特别地，记

$$(z-x_j)^{-k_j} = |z-x_j|^{-k_j}\exp(-ik_j\theta_j) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}\right), \tag{2}$$

其中 $\theta_j=\arg(z-x_j)$且 $j=1，2，\cdots，n-1$. 则 $f'(z)$在半平面 $y\geqslant 0$ 除 $n-1$ 个支点 x_j 外解析.

如果 z_0 是该区域的一个解析点，用 R 标记该区域，则函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f'(s)\mathrm{d}s \tag{3}$$

在该区域单值解析，其中从 z_0 到 z 的积分路径为 R 内的任意围道. 且 $F'(z)=f'(z)$(见 42 节).

定义函数 F 在点 $z=x_1$ 的值以使它连续，注意$(z-x_1)^{-k_1}$是表达式(1)中唯一不在 x_1 解析的因子. 因此，如果定义 $\phi(z)$为表达式其余因子的乘积，则 $\phi(z)$在 x_1 解析，且在开圆盘 $|z-x_1|<R$ 内可以用关于 x_1 的泰勒级数表示. 因此

393

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z-x_1)^{-k_1}\phi(z) \\ &= (z-x_1)^{-k_1}\left[\phi(x_1) + \frac{\phi'(x_1)}{1!}(z-x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!}(z-x_1)^2 + \cdots\right], \end{aligned}$$

或

$$f'(z) = \phi(x_1)(z-x_1)^{-k_1} + (z-x_1)^{1-k_1}\psi(z), \tag{4}$$

其中 ψ 在整个开圆盘解析且连续. 又 $1-k_1>0$，因此等式(4)右边最后一项表示圆盘上半平面内关于 z 的连续函数，其中 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$，如果假定在 $z=x_1$ 函数值为零，则上式最后一项为沿从 Z_1 到 z 的围道的积分，

$$\int_{Z_1}^{z}(s-x_1)^{1-k_1}\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

是在 $z=x_1$ 连续的 z 的函数. 其中 Z_1 和围道都落在半圆盘上. 如果我们定义了在半圆盘内 z 趋近于 x_1 时它的极限的积分值沿相同路径的积分

$$\int_{Z_1}^{z}(s-x_1)^{-k_1}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{1-k_1}[(z-x_1)^{1-k_1}-(Z_1-x_1)^{1-k_1}],$$

同样表示关于 z 在 x_1 连续的函数，函数(4)沿从 Z_1 到 z 指定路径的积分在 $z=x_1$ 连续；且对积分(3)同样成立，因为它可以写为沿 R 内的围道从 z_0 到 Z_1 的积分减去从 Z_1 到 z 的积分.

上述讨论适用于 $n-1$ 个点的每一个 x_j，使 F 在区域 $y\geqslant 0$ 连续.

从等式(1)可知，对充分大的正数 R，存在正常数 M，满足如果 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$，则对于任意 $|z|>R$，

$$|f'(z)|<\frac{M}{|z|^{2-k_n}}. \tag{5}$$

因为 $2-k_n>1$，所以等式(3)中被积函数的级的性质保证当 z 趋向于无穷时，积分的极限存在；即存在 W_n 满足

$$\lim_{z\to\infty}F(z)=W_n\quad(\mathrm{Im}z\geqslant 0). \tag{6}$$

细节的讨论留作练习 1 和 2.

394

导函数如表达式(1)所示的映射函数可以记为 $f(z)=F(z)+B$，其中 B 是复常数. 则映射

$$w=A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\cdots(s-x_{n-1})^{-k_{n-1}}\,\mathrm{d}s+B \tag{7}$$

称为施瓦兹-克里斯托费映射. 这是为了纪念两位德国数学家施瓦兹(1843－1921)和克里斯托费(1829—1900)，他们分别独立地发现了这个式子.

映射(7)在半平面 $y\geqslant 0$ 连续，除点 x_j 外保形. 我们假定 k_j 满足 109 节的条件(5)，另外假定常数 x_j 和 k_j 使得多边形的边不相交，即多边形是单连通围道. 根据 109 节，当 z 取遍 x 轴正方向的点时，它的像为多边形沿正方向的点；则在轴上的点和 P 上的点之间存在一个单射. 根据条件(6)，点 $z=\infty$ 的像点 w_n 存在且 $w_n=W_n+B$.

如果 z 是上半平面 $y\geqslant 0$ 的内点，x_0 为 x 轴上不同于 x_j 的任意点，则从点 x_0 处的向量 t 到连接 x_0 和 z 的线段的角度为正且小于 π(图 160). 在 x_0 的像点 w_0，相应的从向量 τ 到连接 x_0 和 z 的线段的像的角也具有相同的值. 因此半平面的内点的像按逆时针方向，落在多边形各边的左边. 该映射在半平面的内点和多边形的内点之间建立了一个单射，证明留给读者(练习 3).

给定多边形 P，施瓦兹-克里斯托费映射中的常数个数一定可以由映 x 轴到 P 而确定. 为

此，记 $z_0=0$，$A=1$，$B=0$ 且简单地要求 x 轴映为和 P 相似的某个多边形 P'. P'的大小和位置可以通过引入适当的常数 A 和 B 调整为 P 的大小和位置.

k_j 由 P 各顶点的外角确定. $n-1$ 个常数 x_j 仍需选择. x 轴的像是某多边形，它和 P 有相同的角. 但是如果 P'相似于 P，则 $n-2$ 条相连的边和 P 的相应边有相同的比例；这个条件可以由 $n-1$ 个实未知数 x_j 的 $n-3$ 个等式表示. 因此任意去掉 x_j 的两个，或它们之间的两个关系式，剩下的 $n-3$ 个未知数的 $n-3$ 个关系式仍有实数解.

当 x 轴上代替无限点的有限点 $z=x_n$ 表示顶点 w_n 的原像点时，从 109 节可知，施瓦兹-克里斯托费映射有下面的形式

395

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\cdots(s-x_n)^{-k_n}\mathrm{d}s+B, \tag{8}$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_n=2$. 指数 k_j 由多边形的外角确定. 但是在这种情况下，n 个常数 x_j 必须满足上面提到的 $n-3$ 个等式. 因此在映 x 轴为指定多边形的映射(8)中，可以去掉 x_j 中的任意的三个或这 n 个数之间的三个条件.

练习

1. 推导 110 节中的不等式(5).

提示：令 R 大于所有 $|x_j|$ $(j=1, 2, \cdots, n-1)$. 注意如果 R 足够大，对每一个 x_j，当 $|z|>R$，不等式 $|z|/2<|z-x_j|<2|z|$ 成立。利用 110 节的等式(1)和 109 节的条件(5).

2. 利用 110 节的条件(5)和实值函数的不定积分存在的充分条件证明，当 x 趋向于无穷时，$F(x)$有极限 W_n，其中 $F(x)$按等式(3)定义. 同样，证明当 R 趋向于∞时，$f'(z)$在半圆 $|z|=R(\mathrm{Im}z\geqslant 0)$的每条弧上的积分趋于 0. 然后推导出 110 节的等式(6)：

$$\lim_{z\to\infty}F(z) = W_n \quad (\mathrm{Im}z \geqslant 0).$$

3. 根据 79 节，表达式

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z$$

可以用于确定函数 g 在定义正方向的简单封闭围道内的零点的个数，其中在 C 上 $g(z)\neq 0$，C 落在单连通区域 D，且在区域 D 满足 g 解析，$g'(z)$不为零. 在该表达式中，记 $g(z)=f(z)-w_0$，其中 $f(z)$是 110 节的施瓦兹-克里斯托费映射(7)，点 w_0 或者在 x 轴的图像多边形的内部，或者在外部；因此 $f(z)\neq w_0$. 令围道 C 包含圆 $|z|=R$ 的上半部分和 x 轴上包含所有 $n-1$ 个点 x_j 的线段 $-R<x<R$，其中包含每点 x_j 的小段被以该段为直径的圆 $|z-x_j|=\rho_j$ 的上半部分替换. 则在 C 内满足 $f(z)=w_0$ 的点 z 有

$$N_C = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\mathrm{d}z.$$

注意当 $|z|=R$ 且 R 趋于∞时，$f(z)-w_0$ 趋于非零点 W_n-w_0，回顾 110 节中 $|f'(z)|$ 的级的性质(5). 令 ρ_j 趋于零，证明 z 平面的上半部分满足 $f(z)=w_0$ 的点的个数为

$$N = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f'(x)}{f(x)-w_0}\mathrm{d}x.$$

396

推导由于

$$\int_P \frac{\mathrm{d}w}{w-w_0} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f'(x)}{f(x)-w_0}\mathrm{d}x,$$

当 w_0 在 P 内 $N=1$，当 w_0 在 P 外 $N=0$. 证明映半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 为 P 的内部的映射是一一的.

111 三角形和矩形

施瓦兹-克里斯托费映射可以由点 x_j 表示，而与它们的像即多边形的顶点无关. 由于最多有不超过三个的任意点可以去掉，所以当所给多边形多于三边时，为了使 x 轴的像为所给多边形或和所给多边形相似，点 x_j 的一部分必须被确定. 这些被确定的常数的条件要便于使用，其选择还需一定的技巧.

运用该映射的另一个限制在于积分一般比较棘手. 通常初等函数关于一个有限数的积分并不能计算. 在这种情况下，依靠这个映射来解决问题就变得很棘手.

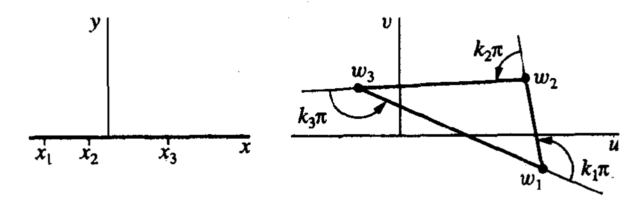


图 161

如果多边形是三角形，顶点为 w_1、w_2 和 w_3(图 161)，则映射可以写为

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}(s-x_3)^{-k_3}\,\mathrm{d}s + B, \tag{1}$$

其中 $k_1+k_2+k_3=2$. 内角 θ_j 满足关系式

$$k_j = 1-\frac{1}{\pi}\theta_j \quad (j=1,2,3).$$

我们取三个点 x_j 都为 x 轴上的有穷数. 每个点可取任意值. 则关于三角形大小和位置的复常数 A 与 B 可以确定，以满足上半平面映为所给三角形区域.

397

如果设顶点 w_3 为点在无穷时的像点，则映射变为

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\,\mathrm{d}s + B, \tag{2}$$

其中 x_1 和 x_2 取任意实数.

等式(1)和(2)的积分并不表示初等函数，除非三角形有一个或两个顶点退化为无穷. 当三角形是等边三角形或是有一个角为 $\pi/3$ 或 $\pi/4$ 的直角三角形时，等式(2)的积分变为椭圆积分.

例 1 对等边三角形，$k_1=k_2=k_3=2/3$. 很容易写出 $x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=\infty$和运用等式(2)，其中 $z_0=1$，$A=1$，$B=0$. 则映射变为

$$w = \int_1^z (s+1)^{-2/3}(s-1)^{-2/3}\mathrm{d}s. \tag{3}$$

点 $z=1$ 的像为 $w=0$；即 $w_2=0$. 如果这个积分中 $z=-1$，则 $s=x$，其中 $-1<x<1$. 且

$$x+1>0 \quad 和 \quad \arg(x+1)=0,$$

而

$$|x-1| = 1-x \quad 和 \quad \arg(x-1)=\pi.$$

因此

$$\begin{aligned} w &= \int_1^{-1}(x+1)^{-2/3}(1-x)^{-2/3}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{2/3}}. \end{aligned} \tag{4}$$

因为置换 $x=\sqrt{t}$，则最后一个积分简化为用来定义贝塔(Beta)函数(77 节练习 7)的一种特殊情况. 定义正数 b 为它的值：

$$b = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{2/3}} = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}\mathrm{d}t = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right). \tag{5}$$

因此顶点 w_1 为

398

$$w_1 = b\exp\frac{\pi i}{3}. \tag{6}$$

顶点 w_3 在 u 正半轴，因为

$$w_3 = \int_1^\infty (x+1)^{-2/3}(x-1)^{-2/3}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{2/3}}.$$

又 z 沿 x 负半轴趋于无穷时，积分(3)也表示 w_3 的值；即

$$\begin{aligned} w_3 &= \int_1^{-1}(|x+1||x-1|)^{-2/3}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{-1}^{-\infty}(|x+1||x-1|)^{-2/3}\exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对 w_1 应用表达式(4)，则

$$\begin{aligned} w_3 &= w_1 + \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right)\int_{-1}^{-\infty}(|x+1||x-1|)^{-2/3}\mathrm{d}x \\ &= b\exp\frac{\pi i}{3} + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right)\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{2/3}}, \end{aligned}$$

或

$$w_3 = b\exp\frac{\pi i}{3} + w_3\exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right).$$

化简 w_3 得

$$w_3 = b. \tag{7}$$

因此我们证明了 x 轴的图像是边长为 b 的等边三角形，如图 162 所示. 我们还可以得到

$$w = \frac{b}{2}\exp\frac{\pi i}{3} \quad 当\ z = 0.$$

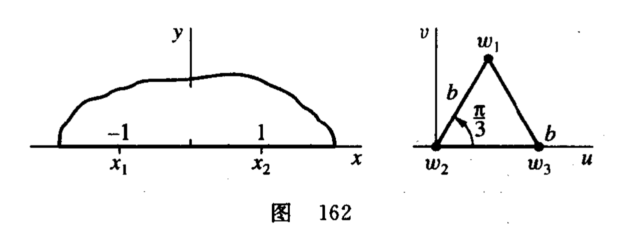


图 162

当多边形为矩形，每个 $k_j=1/2$. 如果我们选取 ± 1 和 $\pm a$ 作为点 x_j，则它们的像为矩形的顶点. 因此有

$$g(z) = (z+a)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-a)^{-1/2}, \tag{8}$$

399

其中 $0\leqslant \arg(z-x_j)\leqslant \pi$，施瓦兹-克里斯托费映射变为

$$w = -\int_0^z g(s)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

再用映射 $W=Aw+B$ 去调整矩形的大小和位置. 积分(9)为椭圆积分

$$\int_0^z (1-s^2)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}\mathrm{d}s \quad \left(k=\frac{1}{a}\right)$$

的常数倍，但被积函数的形式(8)能更清楚地表示出所涉及到的幂函数的适当支函数.

例 2 下面我们确定 $a>1$ 时矩形的顶点. 如图 163 所示，$x_1=-a$，$x_2=-1$，$x_3=1$，$x_4=a$. 所有四个顶点可以用两个正数 b 和 c 表示，而 b 和 c 由 a 的值确定：

$$b = \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}, \tag{10}$$

$$c = \int_1^a |g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}}. \tag{11}$$

如果 $-1<x<0$，则

$$\arg(x+a)=\arg(x+1)=0 \quad 和 \quad \arg(x-1)=\arg(x-a)=\pi;$$

因此

$$g(x) = \left[\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right)\right]^2 |g(x)| = -|g(x)|.$$

如果 $-a<x<-1$，则

$$g(x) = \left[\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right)\right]^3 |g(x)| = i|g(x)|.$$

因此

$$\begin{aligned} w_1 &= -\int_0^{-a} g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{-a} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{-1} |g(x)|\,\mathrm{d}x - i\int_{-1}^{-a} |g(x)|\,\mathrm{d}x = -b+ic. \end{aligned}$$

400

对于

$$w_2=-b,\quad w_3=b,\quad w_4=b+ic \tag{12}$$

的证明留作练习．矩形的位置和维数如图 163 所示．

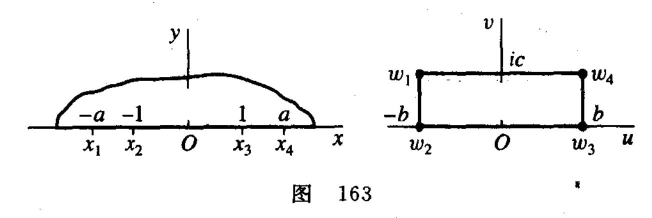


图 163

112 退化的多边形

现在我们对一些退化的多边形运用施瓦兹-克里斯托费映射，这些积分都是初等函数．为了说明，这里例子中出现的映射是在第 8 章曾出现过的．

例 1 现在我们映半平面 $y\geqslant 0$ 为半无限带形区域

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2},\quad v\geqslant 0.$$

我们可以把带形区域看作为有三顶点 w_1，w_2，w_3 且 w_3 的虚部趋近于无穷的三角形的极限形式．

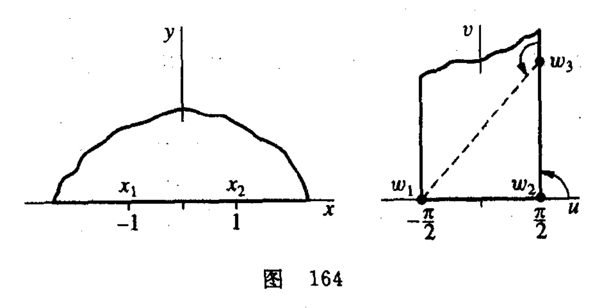


图 164

外角的极限值为

$$k_1\pi=k_2\pi=\frac{\pi}{2}\quad 和\quad k_3\pi=\pi.$$

令点 $x_1=-1$，$x_2=1$ 和 $x_3=\infty$，它们的图像为三角形的顶点．则映射函数的导函数可以记为

401

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=A(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}=A'(1-z^2)^{-1/2}.$$

因此 $w=A'\sin^{-1}z+B$．如果记 $A'=1/a$ 和 $B=b/a$ 则

$$z=\sin(aw-b).$$

这个从 w 到 z 平面的映射满足条件：如果 $a=1$ 且 $b=0$，则当 $w=-\pi/2$ 时 $z=-1$，当 $w=\pi/2$ 时 $z=1$．最终导出的映射为

$$z = \sin w,$$

正如我们在 89 节所证明的，该映射映带形区域为上半平面.

例 2 设带形区域 $0<v<\pi$ 为菱形的顶点 w_2 和 w_4 分别向左向右趋于无穷时的极限形式(图 165)，其中菱形的顶点分别为 $w_1=\pi i$，w_2，$w_3=0$ 和 w_4. 取极限后，外角变为

$$k_1\pi = 0, \quad k_2\pi = \pi, \quad k_3\pi = 0, \quad k_4\pi = \pi.$$

这样只有 x_1 需确定，选取 $x_2=0$，$x_3=1$，$x_4=\infty$. 则施瓦兹-克里斯托费映射函数的导函数变为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = A(z-x_1)^0 z^{-1}(z-1)^0 = \frac{A}{z};$$

因此

$$w = A\mathrm{Log}z + B.$$

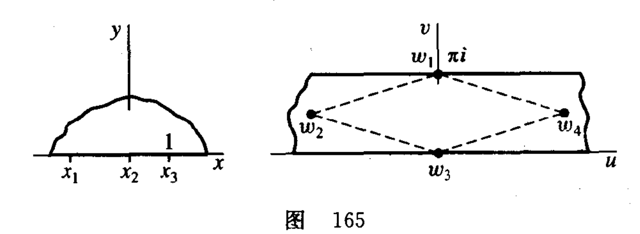


图 165

由于 $z=1$ 时 $w=0$，所以 $B=0$. 常数 A 为实数，因为当 $z=x$ 和 $x>0$ 时点 w 落在实轴上. 点 $w=\pi i$ 为点 $z=x_1$ 的像点，其中 x_1 为负数；因此

$$\pi i = A\mathrm{Log}x_1 = A\ln|x_1| + A\pi i.$$

通过确定实部和虚部，我们可以知道 $|x_1|=1$ 和 $A=1$. 因此映射变为

$$w = \mathrm{Log}z;$$

同样 $x_1=-1$. 从 88 节例 3 已知该映射映半平面为带形区域. [402]

这两个例子的过程并不严格，因为角和坐标的极限值并没有依次介绍，只是觉得有用时就用它. 但是如果我们检验所得映射，就会知道在映射函数的引入过程中我们的证明是恰当的. 这种形式化的方法比严格的证明要简练而不乏味.

练习

1. 111 节的映射(1)中 $B=z_0=0$ 且

$$A = \exp\frac{3\pi i}{4}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{3}{4},$$

则映射映 x 轴为等腰直角三角形. 证明三角形的顶点为

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = b,$$

其中 b 是正常数

$$b=\int_0^1(1-x^2)^{-3/4}x^{-1/2}\mathrm{d}x.$$

同样证明

$$2b=B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),$$

其中 B 是贝塔函数.

2. 对图 163 所示矩形其余顶点求解 111 节的表达式(1).

3. 证明 111 节的等式(8)和(9)中当 $0<a<1$ 时，矩形的顶点如图 163 所示，其中 b 和 c 为

$$b=\int_0^a|g(x)|\mathrm{d}x,\quad c=\int_a^1|g(x)|\mathrm{d}x.$$

4. 证明 110 节中施瓦兹-克里斯托费映射(7)的特殊形式

$$w=i\int_0^z(s+1)^{-1/2}(s-1)^{-1/2}s^{-1/2}\mathrm{d}s$$

映 x 轴为正方形，其顶点为

403

$$w_1=bi,\quad w_2=0,\quad w_3=b,\quad w_4=b+ib,$$

其中(正)数 b 由贝塔函数表示为

$$b=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$$

5. 利用施瓦兹-克里斯托费映射证明映射

$$w=z^m\quad(0<m<1)$$

映半平面 $y\geqslant0$ 为楔形区域 $|w|\geqslant0$，$0\leqslant\arg w\leqslant m\pi$，且把点 $z=1$ 变为点 $w=1$。设楔形区域为角 α 趋于零时图 166 所示三角形区域的极限形式。

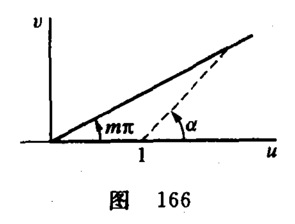


图 166

6. 讨论附录 B 的图 26. 当点 z 沿负实轴向右移动时，它的像点沿整个 u 轴向右移动. 当 z 为实轴的一段 $0\leqslant x\leqslant1$ 上的点，它的像点沿半直线 $v=\pi i(u\geqslant1)$ 向左移动；当 z 沿实轴的 $x\geqslant1$ 的部分向右移动时，它的像点 w 沿相同的半直线 $v=\pi i(u\geqslant1)$ 向右移动. 注意 w 在点 $z=0$ 和 $z=1$ 的像点处移动方向改变. 这种改变表明映射函数的导函数可以写为

$$f'(z)=A(z-0)^{-1}(z-1),$$

其中 A 为某一常数；因此可形式上得到映射函数为

$$w=\pi i+z-\mathrm{Log}z,$$

可以证明该函数映半平面为图中所示区域.

7. 当点 z 沿负实轴的 $x\leqslant-1$ 的部分向右移动时，它的像点沿 w 平面的负实轴向右移动. 当点 z 分别沿实轴的线段 $-1\leqslant x\leqslant0$ 和 $0\leqslant x\leqslant1$ 的部分向右移动时，它的像点 w 分别沿 v 轴的 $0\leqslant v\leqslant1$ 的线段 v 增加和减少的方向移动. 最后当 z 沿正实轴的 $x\geqslant1$ 部分向右移动时，像点

沿 w 平面的正实轴向右移动．注意 w 在点 $z=-1$，$z=0$ 和 $z=1$ 处改变移动方向．映射函数的导函数为

$$f'(z)=A(z+1)^{-1/2}(z-0)^{1}(z-1)^{-1/2},$$

404

A 是某一常数．因此可获得形式上的映射函数

$$w=\sqrt{z^2-1},$$

其中 $0<\arg\sqrt{z^2-1}<\pi$．考虑连续映射

$$Z=z^2,W=Z-1,\quad 和 \quad w=\sqrt{W},$$

证明终函数映右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 为沿 v 轴之线段 $0<v\leqslant 1$ 上具有割线的半平面 $\mathrm{Im}w>0$ 上．

8. 分式线性映射

$$Z=\frac{i-z}{i+z}$$

的逆函数映单位圆盘 $|Z|\leqslant 1$(除 $Z=-1$)为半平面 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$(附录 B 图 13)．设 Z_j 为圆 $|Z|=1$ 上 110 节施瓦兹-克里斯托费映射(8)中所用到的 $z=x_j(j=1,2,\cdots,n)$的原像点．在不确定幂函数的分支的情况下证明

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}Z}=A'(Z-Z_1)^{-k_1}(Z-Z_2)^{-k_2}\cdots(Z-Z_n)^{-k_n},$$

其中 A'为常数．证明映射

$$w=A'\int_0^Z(S-Z_1)^{-k_1}(S-Z_2)^{-k_2}\cdots(S-Z_n)^{-k_n}\mathrm{d}S+B$$

映圆 $|Z|=1$ 的内部为多边形的内部，多边形的顶点为圆上点 Z_j 的像点．

9. 练习 8 的积分中，令 $Z_j(j=1,2,\cdots,n)$为单位圆上的 n 个根．记 $\omega=\exp(2\pi i/n)$和 $Z_1=1$，$Z_2=\omega$，$\cdots$，$Z_n=\omega^{n-1}$．令每一个 $k_j(j=1,2,\cdots,n)$为 $2/n$．则练习 8 的积分变为

$$w=A'\int_0^Z\frac{\mathrm{d}S}{(S^n-1)^{2/n}}+B.$$

证明当 $A'=1$ 和 $B=0$ 时，映射映单位圆 $|Z|=1$ 的内部为正 n 边形的内部，其中多边形的中心为点 $w=0$．

提示：每个点 $Z_j(j=1,2,\cdots,n)$的像点为在顶点处内角为 $2\pi/n$ 的多边形的顶点．记

$$w_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}S}{(S^n-1)^{2/n}},$$

积分路径为从 $Z=0$ 到 $Z=1$ 的正实轴，且选取$(S^n-1)^2$ 的 n 个根的主值．证明点 $Z_2=\omega$，$\cdots$，$Z_n=\omega^{n-1}$的像点为 ωw_1，$\cdots$，$\omega^{n-1}w_1$．所以多边形为正多边形且中心为 $w=0$．

405

113 通过裂缝的流体流动

现在我们进一步考虑第 10 章中理想化的稳定流动的例子，它有助于说明流体流动问题中的源和漏．在本节和下节中，我们在 uv 平面内而不是在 xy 平面上考虑问题，这样就可以不经

过平面映射而直接获得本章前面提到的一些结果.

考虑两平行平面 $v=0$ 和 $v=\pi$ 之间的流体的二维稳定流动，其中流体通过第一个平面上一条窄裂缝沿与 uv 平面在原点垂直的直线流入(图 167). 在单位体积单位时间单位深度时，通道内过裂缝的流体流动速率为 Q，深度沿 uv 平面垂直的方向测量. 则在每个边上流速为 $Q/2$.

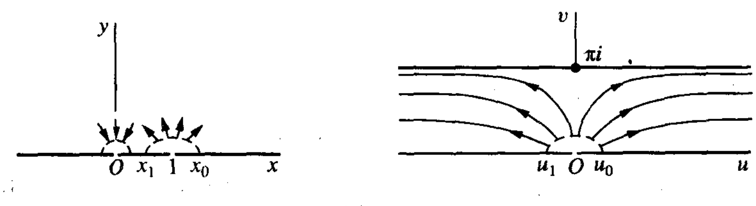


图 167

映射 $w=\mathrm{Log}z$ 为单射，映 z 平面的上半部分 $y>0$ 为 w 平面的带形区域 $0<v<\pi$(见 112 节例 2). 反函数

$$z = e^w = e^u e^{iv} \tag{1}$$

映带形区域为半平面(见 13 节例 3). 在映射(1)作用下，u 轴的像为 x 正半轴，线 $v=\pi$ 的像为 x 负半轴. 因此带形区域的边界映射为半平面的边界.

点 $w=0$ 的像点为 $z=1$. 点 $w=u_0$ 的像点为 $z=x_0$，其中 $u_0>0$，$x_0>1$. 则流体流过带形区域内连接点 $w=u_0$ 和点(u, v)的曲线的流速为流函数 $\psi(u, v)$(107 节). 如果 u_1 为负实数，则通道内过裂缝的流速可以写为

$$\psi(u_1, 0) = Q.$$

106 在保形映射下，函数 ψ 变为 x 和 y 的函数，它表示 z 平面相应区域流动的流函数；即两平面内流过相应曲线的流动流速相同. 同第 10 章一样，用相同的符号 ψ 表示两平面内的不同流函数. 由于点 $w=u_1$ 的像点为 $z=x_1$，其中 $0<x_1<1$，通过 z 平面上半部分内连接 $z=x_0$ 和 $z=x_1$ 的任意曲线的流动流速也为 Q. 因此在点 $z=1$ 有源等价于在点 $w=0$ 有源.

把上述讨论用于积分可得*在保形映射下，在给定点的源或漏对应着它的像点有相同的源和漏.*

当 $\mathrm{Re}w$ 趋于 $-\infty$ 时，w 的像点趋于 $z=0$. 在标记点浓度为 $Q/2$ 的漏对应于带形区域向左无限远的漏. 为了运用上述讨论，我们考虑过带形区域左半部分连接边界线 $v=0$ 与 $v=\pi$ 的曲线的流速，和过该曲线在 z 平面的像的流速.

在带形区域右边界的漏变为 z 平面内无限远的漏.

z 平面上半部分的流动的流函数 ψ 在这种情况下一定满足，沿 x 轴三部分的每一个，函数值为常数. 且当 z 绕 $z=1$ 从位置 $z=x_0$ 移到位置 $z=x_1$ 时，它的值增加 Q 倍；当 z 绕原点以相同的方式移动时，它的值增加 $Q/2$ 倍. 而函数

$$\psi = \frac{Q}{\pi}\left[\mathrm{Arg}(z-1) - \frac{1}{2}\mathrm{Arg}z\right]$$

满足这些要求. 而且这个函数在半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 调和，因为它是函数

$$F = \frac{Q}{\pi}\left[\mathrm{Log}(z-1) - \frac{1}{2}\mathrm{Log}z\right] = \frac{Q}{\pi}\mathrm{Log}(z^{1/2} - z^{-1/2})$$

的虚部.

函数 F 是 z 上半平面内流动的复势函数. 因为 $z=e^w$，所以通道内流动的复势函数 $F(w)$ 为

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\mathrm{Log}(e^{w/2} - e^{-w/2}).$$

去掉常数，则变为

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\mathrm{Log}\left(\sinh\frac{w}{2}\right). \tag{2}$$

我们用相同的符号 F 表示三个不同的函数，其中一个在 z 平面，另外两个在 w 平面.

速度矢量 $\overline{F'(w)}$ 由等式

$$V = \frac{Q}{2\pi}\coth\frac{\overline{w}}{2} \tag{3}$$

407

给定. 因此有

$$\lim_{|u|\to\infty} V = \frac{Q}{2\pi}.$$

同样点 $w=\pi i$ 为停滞点；即速度在该点为零. 因此沿通道的壁 $v=\pi$ 的流体压力是裂缝点除外的所有点中最大的.

通道的流函数 $\psi(u, v)$ 是等式(2)给出的函数 $F(w)$ 的虚部. 因此流函数 $\psi(u, v)=c_2$ 为曲线

$$\frac{Q}{\pi}\mathrm{Arg}\left(\sinh\frac{w}{2}\right) = c_2.$$

等式可以化简为

$$\tan\frac{v}{2} = c\tanh\frac{u}{2}, \tag{4}$$

其中 c 为任意实常数. 其中一些流线如图 167 所示.

114 在有迂回的通道内的流动

为了进一步讨论施瓦兹-克里斯托费映射的应用，我们将寻找在宽度有突然变化的通道(图 168)内流体流动的复势. 我们定义单位长度，使通道的宽度为 π 单位；则 $h\pi$ 表示窄边的宽度，其中 $0<h<1$. 用实常数 V_0 表示远离宽边偏移的流体的速度；即

$$\lim_{u\to-\infty} V = V_0,$$

其中复变量 V 表示速度矢量. 则通道内单位深度的流动速率或流槽右边及流源左边之流量为

$$Q = \pi V_0. \tag{1}$$

通道的横截面可以认为是图 168 所示四边形的第一和第四个顶点分别向左和向右移到无穷远的极限情形，其中 w_1，w_2，w_3，w_4 为四边形的四个顶点. 取极限后，外角变为

$$k_1\pi = \pi,\quad k_2\pi = \frac{\pi}{2},\quad k_3\pi = -\frac{\pi}{2},\quad k_4\pi = \pi.$$

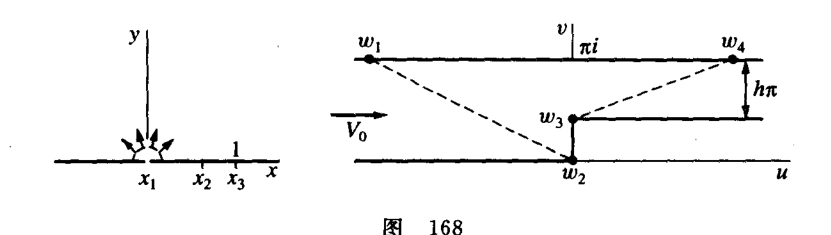


图 168

同前面一样，只要方便，我们就用极限值. 如果我们记 $x_1=0$，$x_3=1$，$x_4=\infty$，x_2 待定，其中 $0<x_2<1$，则映射函数的导函数变为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=Az^{-1}(z-x_2)^{-1/2}(z-1)^{1/2}. \tag{2}$$

为了简化常数 A 和 x_2 的求解，我们先求解流动的复势. 通道左边无限远处的流动源对应于 $z=0$ 的源(103 节). 通道横截面的全部边界为 x 轴的像. 利用等式(1)，我们知道函数

$$F=V_0\mathrm{Log}z=V_0\ln r+iV_0\theta \tag{3}$$

是 z 平面的上半部分流动的势，其中在原点的源即为所求. 流函数为 $\psi=V_0\theta$. 当沿半圆 $z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$从 0 到 $V_0\pi$ 时它的值增加，其中 $R>0$，θ 从 0 变到 π. [比较 107 节的等式(5)和 108 节的练习 8.]

w 平面内速度 V 的复共轭可以写为

$$\overline{V(w)}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}.$$

因此，通过等式(2)和(3)知

$$\overline{V(w)}=\frac{V_0}{A}\left(\frac{z-x_2}{z-1}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

在点 w_1 的极限位置，对应于 $z=0$，速度是实常数 V_0. 从等式(4)得

$$V_0=\frac{V_0}{A}\sqrt{x_2}.$$

408～409

在 w_4 的极限位置，对应于 $z=\infty$，令实数 V_4 表示速度. 因此易知当生成通道窄部分的垂直线段向右移向无穷时，V 在线段的每一点趋向 V_4. 我们先假设 w 为从等式(2)得到的 z 的函数；为了缩短讨论，我们假设这是真的. 则由于流动稳定，

$$\pi hV_4=\pi V_0=Q,$$

或 $V_4=V_0/h$. 在等式(4)中令 z 趋于无穷，得

$$\frac{V_0}{h}=\frac{V_0}{A}.$$

所以有

$$A=h,\quad x_2=h^2 \tag{5}$$

和

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{h}\left(\frac{z-h^2}{z-1}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

从等式(6)我们知速度的数量 $|V|$ 在突变的角 w_3 处为无穷大，因为它是 $z=1$ 的像点. 同样角 w_2 是停滞点，$V=0$. 沿通道的边界，流体压力在 w_2 最大而在 w_3 最小.

为了写出势和变量 w 的关系式，我们对等式(2)积分，等式(2)可以转化为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{h}{z}\left(\frac{z-1}{z-h^2}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

用新变量 s 替换

$$\frac{z-h^2}{z-1} = s^2,$$

则等式(7)化简为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2h\left(\frac{1}{1-s^2} - \frac{1}{h^2-s^2}\right).$$

因此

$$w = h\mathrm{Log}\,\frac{1+s}{1-s} - \mathrm{Log}\,\frac{h+s}{h-s}. \tag{8}$$

积分常数为零，因为当 $z=h^2$ 时，s 为零，因此 w 为零.

根据 s，等式(3)的势函数 F 变为

$$F = V_0\mathrm{Log}\,\frac{h^2-s^2}{1-s^2};$$

410

同样地，

$$s^2 = \frac{\exp(F/V_0)-h^2}{\exp(F/V_0)-1}. \tag{9}$$

用这个等式替代等式(8)的 s，可得势函数 F，作为 w 的函数的关系式.

115 导电金属板边缘的电势

无限长的两平行导电金属板保持电势 $V=0$，置于它们中间的半无限金属板的电势为 $V=1$. 坐标系和单位长度的选取满足上述金属板分别位于平面 $v=0$，$v=\pi$ 和 $v=\pi/2$(图 169). 下面我们来确定这些金属板之间的势函数 $V(u, v)$.

该区域在 uv 平面的横截面为图 169 虚线所示四边形的点 w_1 和 w_3 向右移动且 w_4 向左移

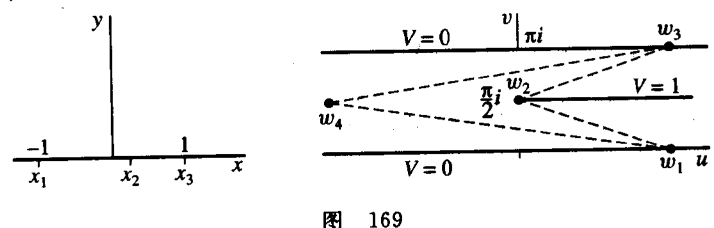


图 169

动的极限形式. 为了利用施瓦兹-克里斯托费映射，令 x_4 对应于顶点 w_4，为无穷点. 选取 $x_1=-1$，$x_3=1$，x_2 待定. 则四边形的外角的极限值为

$$k_1\pi=\pi,\quad k_2\pi=-\pi,\quad k_3\pi=k_4\pi=\pi.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=A(z+1)^{-1}(z-x_2)(z-1)^{-1}=A\left(\frac{z-x_2}{z^2-1}\right)=\frac{A}{2}\left(\frac{1+x_2}{z+1}+\frac{1-x_2}{z-1}\right),$$

而且映 z 平面上半部分为 w 平面的分开的带形区域的映射为

$$w=\frac{A}{2}[(1+x_2)\mathrm{Log}(z+1)+(1-x_2)\mathrm{Log}(z-1)]+B. \tag{1}$$

令 A_1，A_2 和 B_1，B_2 分别表示常数 A 和 B 的实部和虚部. 当 $z=x$ 时点 w 位于分开的带

411

形区域的边界上；根据等式(1)，

$$\begin{aligned}u+iv=\frac{A_1+iA_2}{2}\{&(1+x_2)[\ln|x+1|+i\arg(x+1)]\\&+(1-x_2)[\ln|x-1|+i\arg(x-1)]\}+B_1+iB_2.\end{aligned} \tag{2}$$

为了确定常数，注意连接 w_1 和 w_4 的线段的极限位置为 u 轴. 这条线段为 x 轴上的点 $x_1=-1$ 向左部分的像；这是因为连接 w_3 和 w_4 的线段为 x 轴上的点 $x_3=1$ 向右部分的像，四边形的其余两边为 x 轴剩下两段的像. 因此当 $v=0$ 且 u 沿正值趋于无穷时，相应点 x 从左趋于点 $z=-1$. 因此

$$\arg(x+1)=\pi,\quad \arg(x-1)=\pi,$$

且 $\ln|x+1|$ 趋于 $-\infty$. 由于 $-1<x_2<1$，等式(2)的大括号内量的实部趋于 $-\infty$. 因为 $v=0$，所以 $A_2=0$；否则右边的虚部可能变为无穷. 由于两边虚部相等，即

$$0=\frac{A_1}{2}[(1+x_2)\pi+(1-x_2)\pi]+B_2.$$

因此

$$-\pi A_1=B_2,\quad A_2=0. \tag{3}$$

连接 w_1 和 w_2 的线段的极限位置为半直线 $v=\pi/2(u\geqslant 0)$. 这条半直线上的点为 $z=x$ 的点，其中 $-1<x\leqslant x_2$；同样，

$$\arg(x+1)=0,\quad \arg(x-1)=\pi.$$

化简等式(2)两边的虚部，得关系式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{A_1}{2}(1-x_2)\pi+B_2. \tag{4}$$

最后，连接 w_3 和 w_4 的线段的极限位置为 $u+\pi i$，为点 x 的像点，其中 $x>1$. 对这些点化简等式(2)的虚部，得

$$\pi=B_2.$$

利用等式(3)和等式(4)，

$$A_1 = -1, \quad x_2 = 0.$$

412

因此 $x=0$ 的像点为顶点 $w=\pi i/2$；把这些值代入等式(2)且化简实部，得 $B_1=0$.

映射(1)变为

$$w = -\frac{1}{2}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(z-1)] + \pi i, \tag{5}$$

或

$$z^2 = 1 + e^{-2w}. \tag{6}$$

在这个映射下，所需调和函数 $V(u, v)$ 变为半平面 $y>0$ 内关于 x 和 y 的调和函数；且满足图 170 所示边界条件. 注意此时 $x_2=0$. 给定边值的半平面上的调和函数为解析函数

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Log}\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + \frac{i}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

的虚部，其中 θ_1 和 θ_2 在 0 和 π 之间变化. 写这些角的切线为 x 和 y 的函数，得

$$\tan\pi V = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2y}{x^2+y^2-1}. \tag{7}$$

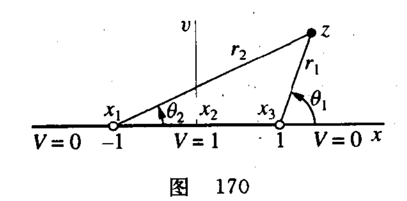


图 170

等式(6)给出 x^2+y^2 和 x^2-y^2 关于 u 和 v 的表达式. 从等式(7)可知势函数 V 和坐标 u、v 的关系为

$$\tan\pi V = \frac{1}{s}\sqrt{e^{-4u} - s^2}, \tag{8}$$

其中

$$s = -1 + \sqrt{1 + 2e^{-2u}\cos 2v + e^{-4u}}.$$

练习

413

1. 利用施瓦兹-克里斯托费映射形式求解附录 B 图 22 给出的映射函数.

2. 解释有半无限矩形障碍物的通道(图 171)内流动问题的解包含在 114 节所求问题的解中.

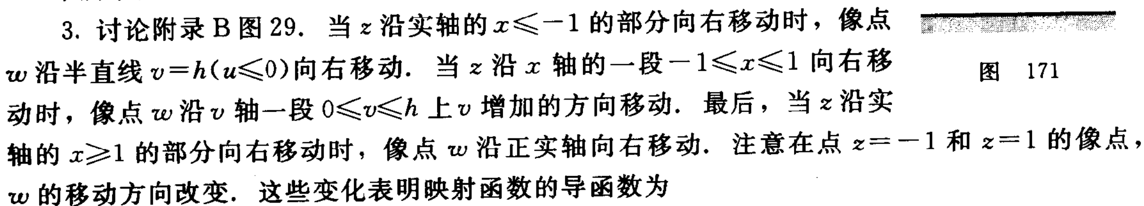


图 171

3. 讨论附录 B 图 29. 当 z 沿实轴的 $x\leqslant-1$ 的部分向右移动时，像点 w 沿半直线 $v=h(u\leqslant0)$ 向右移动. 当 z 沿 x 轴的一段 $-1\leqslant x\leqslant1$ 向右移动时，像点 w 沿 v 轴一段 $0\leqslant v\leqslant h$ 上 v 增加的方向移动. 最后，当 z 沿实轴的 $x\geqslant1$ 的部分向右移动时，像点 w 沿正实轴向右移动. 注意在点 $z=-1$ 和 $z=1$ 的像点，w 的移动方向改变. 这些变化表明映射函数的导函数为

$$\frac{dw}{dz}=A\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2},$$

其中 A 是某一常数．因此可形式上得到图中所给映射、证明这个映射有如下形式

$$w=\frac{h}{\pi}\{(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}+\mathrm{Log}[z+(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}]\},$$

其中 $0\leqslant\arg(z\pm1)\leqslant\pi$，且按图中所示方式映射边界．

4．定义 $T(u,v)$ 为附录 B 图 29 所示 w 平面的阴影区域内的受约束的稳定温度，边界条件为当 $u<0$ 时 $T(u,h)=1$，在边界的其余部分 $(B'C'D')T=0$．利用参数 $\alpha(0<\alpha<\pi/2)$，证明 y 轴正半轴上的点 $z=i$ 的像为

$$w=\frac{h}{\pi}\left[\ln(\tan\alpha+\sec\alpha)+i\left(\frac{\pi}{2}+\sec\alpha\right)\right]$$

（见练习 3），且在点 w 的温度为

$$T(u,v)=\frac{\alpha}{\pi}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

5．定义 $F(w)$ 为附录 2 图 29 中 w 平面的阴影区域所示的深流底部有一个阶梯的流体流动的复势函数，其中当 $|w|$ 在该区域趋于无穷时流速 V 趋于实常数 V_0．则映射为练习 3 中的映 z 平面的上半部分为给定区域的映射．利用链式法则

414

$$\frac{dF}{dw}=\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dw}$$

证明

$$\overline{V(w)}=V_0(z-1)^{1/2}(z+1)^{-1/2};$$

利用其像点在流的底部的那些点 $z=x$，证明

$$|V|=|V_0|\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.$$

注意沿 $A'B'$ 速度从 $|V_0|$ 增长，直到在 B' 点 $|V|=\infty$，然后减小，到 C' 点为零，从 C' 到 D' 增加到 $|V_0|$；注意在 B' 和 C' 之间的点

$$w=i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)h$$

415 速度为 $|V_0|$．

第 12 章　泊松型的积分公式

本章中，我们介绍一个定理，它可使我们得到一类边值问题的解．这些解用定积分或广义积分表示．出现的积分大多是可以计算的．

116　泊松积分公式

令 C_0 为定义正方向的圆，中心在原点，且假设函数 f 在 C_0 内和 C_0 上解析．则柯西积分公式（47 节）

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z} \tag{1}$$

表示 f 在 C_0 内任一点的值与 f 在 C_0 上的点 s 相关．本节中，我们将由公式（1）得到函数 f 的实部的相关公式；在 117 节中，我们将应用这个结果解决边界为 C_0 的圆盘的狄利克雷问题（98 节）．

定义 r_0 为 C_0 的半径，且记 $z=r\exp(i\theta)$，其中 $0<r<r_0$（图 172）．则非零点 z 关于圆的对称点 z_1 位于从原点出发的过 z 的射线上，且满足条件 $|z_1||z_2|=r_0^2$；即如果 s 为 C_0 上的点，则

$$z_1=\frac{r_0^2}{r}\exp(i\theta)=\frac{r_0^2}{\overline{z}}=\frac{s\overline{s}}{\overline{z}}. \tag{2}$$

417

由于 z_1 在圆 C_0 的外面，从柯西-古萨定理可知等式（1）的积分为零，当 z_1 代替被积函数中的 z．得出

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\left(\frac{1}{s-z}-\frac{1}{s-z_1}\right)f(s)\mathrm{d}s;$$

对 C_0 运用参数化表示 $s=r_0\exp(i\phi)$ $(0\leqslant\phi\leqslant 2\pi)$，得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{s}{s-z}-\frac{s}{s-z_1}\right)f(s)\mathrm{d}\phi.$$

为了方便，用 s 表示 $r_0\exp(i\phi)$．

用等式（2）的最后一个式子代替 z_1，则参数表示中的因子可以记为

$$\frac{s}{s-z}-\frac{1}{1-(s/\overline{z})}=\frac{s}{s-z}+\frac{\overline{z}}{s-z}=\frac{r_0^2-r^2}{|s-z|^2}. \tag{3}$$

则柯西积分公式（1）变形为

$$f(re^{i\theta})=\frac{r_0^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(r_0e^{i\phi})}{|s-z|^2}\mathrm{d}\phi, \tag{4}$$

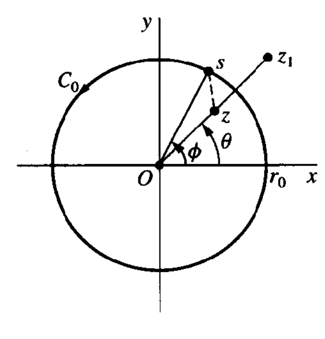
其中 $0<r<r_0$．当 $r=0$ 时公式也成立；这种情形下，它可简化为

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r_0e^{i\phi})\mathrm{d}\phi,$$

这正是等式（1）在 $z=0$ 时的参数形式.

量 $|s-z|$ 为点 s 到 z 的距离，应用余弦定理（图 172）得

$$|s-z|^2=r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2. \tag{5}$$



418

图 172

因此如果 u 为解析函数 f 的实部，则由公式（4）得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)u(r_0,\phi)}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\phi \quad (r<r_0). \tag{6}$$

这是调和函数 u 在以圆 $r=r_0$ 为边界的开圆盘内的泊松积分公式.

公式（6）定义了一个从 u（r_0，ϕ）到 u（r，θ）的线性分式映射．映射的核，除去因子 1/（2π）外，为实值函数

$$P(r_0,r,\phi-\theta)=\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}, \tag{7}$$

我们称之为泊松核．利用等式（5），我们可以得到

$$P(r_0,r,\phi-\theta)=\frac{r_0^2-r^2}{|s-z|^2}; \tag{8}$$

因为 $r<r_0$，所以 P 为正函数．又由于 $\bar{z}/(\bar{s}-\bar{z})$ 和它的复共轭 $z/(s-z)$ 有相同的实部，所以我们可以从等式（3）的第二个式子得到

$$P(r_0,r,\phi-\theta)=\mathrm{Re}\left(\frac{s}{s-z}+\frac{z}{s-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{s+z}{s-z}\right). \tag{9}$$

所以对 C_0 上的每个不动点 s，P（r_0，r，$\phi-\theta$）为 C_0 内 r 和 θ 的调和函数．从等式（7），得到 P（r_0，r，$\phi-\theta$）为 $\phi-\theta$ 的偶的周期函数，周期为 2π；当 $r=0$ 时它的值为 1.

泊松积分公式（6）可以写为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)u(r_0,\phi)\mathrm{d}\phi \quad (r<r_0). \tag{10}$$

当 f（z）$=u$（r，θ）$=1$ 时，等式（10）表明 P 有性质

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)\mathrm{d}\phi=1 \quad (r<r_0). \tag{11}$$

我们曾假设 f 不仅在 C_0 内解析，而且在 C_0 上也解析；因此 u 在包含圆上所有点的区域内也解

析．特别地，u 在 C_0 上连续．这个条件将被放宽．

117 圆盘上的狄利克雷问题

令 F 为 θ 在区间 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 内的分段连续函数．F 的泊松积分映射由 116 节介绍的泊松核 $P(r_0, r, \phi-\theta)$ 定义为 [419]

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)F(\phi)\mathrm{d}\phi \quad (r<r_0). \tag{1}$$

本节中，我们将证明函数 $U(r, \theta)$ 在圆 $r=r_0$ 内为调和函数，

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r<r_0}}U(r,\theta)=F(\theta), \tag{2}$$

F 在每个固定 θ 都连续．若除去 F 不连续的有限个点 (r_0, θ) 外，当 (r, θ) 沿某条半径趋于 (r_0, θ) 时，$U(r, \theta)$ 趋于边值 $F(\theta)$；则在这种意义下，U 为圆盘 $r<r_0$ 内狄利克雷问题的解．

例 证明上述结论前，我们先用它求解单位半径的空柱面内的势 $V(r, \theta)$，纵向裂开为两相等的部分；在其中一个部分 $V=1$，在另一个部分 $V=0$．这个问题通过 106 节的保形映射解决了；回忆它是怎样解释一个 $r<1$ 的圆盘的狄利克雷问题的，其中在边界 $r=1$ 的上半部分 $V=0$，在下半部分 $V=1$（见图 173）．

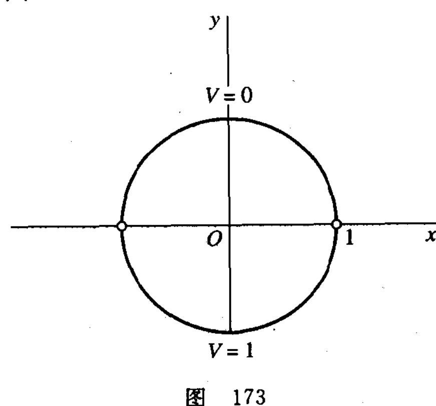


图 173

在等式（1）中，用 V 代替 U，$r_0=1$，且当 $0<\phi<\pi$ 时 $F(\phi)=0$，当 $\pi<\phi<2\pi$ 时 $F(\phi)=1$．因此可得

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}P(1,r,\phi-\theta)\mathrm{d}\phi, \tag{3}$$

其中

$$P(1,r,\phi-\theta)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}.$$

[420]

$P(1, r, \psi)$ 的不定积分为

$$\int P(1,r,\psi)\mathrm{d}\psi = 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\psi}{2}\right), \tag{4}$$

被积函数为右边的函数关于 ψ 的导数. 从等式 (3) 得

$$\pi V(r,\theta) = \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{2\pi-\theta}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\pi-\theta}{2}\right).$$

对 tan $[\pi V(r,\ \theta)]$ 的表达式进行化简，从最后一个等式（见 118 节练习 3）我们知

$$V(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\theta}\right) \quad (0 \leqslant \arctan t \leqslant \pi), \tag{5}$$

反正切函数的值上的约束是显然的. 在直角坐标系下，这个解和 106 节的解相同. 如在例子前声称的，现在我们证明等式 (1) 定义的函数 U 满足圆盘 $r<r_0$ 的狄利克雷问题. 首先，U 在圆 $r=r_0$ 内调和，因为 P 是 r 和 θ 的调和函数. 又由于 F 分段连续，积分 (1) 可以表示为有限个定积分的和，其中每一个被积函数关于 r，θ，ϕ 连续. 这些被积函数关于 r 和 θ 的偏导数也连续. 由于关于 r 和 θ 的积分和求导的顺序可以交换，且在极坐标 r 和 θ (25 节练习 5) 下 P 满足拉普拉斯方程

$$r^2P_{rr} + rP_r + P_{\theta\theta} = 0,$$

因此可知 U 也满足这个方程.

为了证明极限 (2)，我们需要证明如果 F 在 θ 连续，则对任意正数 ε 存在正数 δ 满足当 $0<r_0-r<\delta$ 时，

$$|U(r,\theta) - F(\theta)| < \varepsilon. \tag{6}$$

我们从 116 节提到的泊松核的性质 (11) 开始，记

$$U(r,\theta) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)[F(\phi)-F(\theta)]\mathrm{d}\phi.$$

为了方便，令 F 以 2π 为周期，周期性延拓，这样被积函数在 ϕ 有相同的周期. 同样由于极限性质的确定，我们可以假设 $0<r<r_0$.

421

接着我们注意到，由于 F 在 θ 连续，所以存在一个小正数 α 满足当 $|\phi-\theta| \leqslant \alpha$ 时，

$$|F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

显然，

$$U(r,\theta) - F(\theta) = I_1(r) + I_2(r), \tag{8}$$

其中

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0,r,\phi-\theta)[F(\phi)-F(\theta)]\mathrm{d}\phi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)[F(\phi)-F(\theta)]\mathrm{d}\phi.$$

根据上述不等式 (7) 的第一个式子和 116 节的该函数的性质 (11)，P 是正值函数 (116 节). 该事实可以使我们得到不等式

$$|I_1(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0,r,\phi-\theta)\,|F(\phi)-F(\theta)|\,\mathrm{d}\phi$$
$$< \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)\mathrm{d}\phi = \frac{\varepsilon}{2}.$$

对积分 I_2 (r)，从 116 节图 172 可知当 s 的角 ϕ 在闭区间

$$\theta+\alpha \leqslant \phi \leqslant \theta-\alpha+2\pi$$

变化时，P $(r_0, r, \phi-\theta)$ 的表达式 (8) 中的分母 $|s-z|^2$ 有（正的）最小值 m. 所以如果用 M 表示分段连续函数 $|F(\phi)-F(\theta)|$ 在区间 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ 的上界，则

$$|I_2(r)| \leqslant \frac{(r_0^2-r^2)M}{2\pi m}2\pi < \frac{2Mr_0}{m}(r_0-r) < \frac{2Mr_0}{m}\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

条件是满足 $r_0-r<\delta$，其中

$$\delta = \frac{m\varepsilon}{4Mr_0}. \tag{9}$$

最后，上面两段的结论告诉我们

$$|U(r,\theta)-F(\theta)| \leqslant |I_1(r)|+|I_2(r)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

422

当 $r_0-r<\delta$，其中 δ 为等式 (9) 定义的正数. 即当 δ 选定时表达式 (6) 成立.

根据表达式 (1)，U 在 $r=0$ 的值为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\mathrm{d}\phi.$$

因此调和函数在圆 $r=r_0$ 的中心的值为圆的边界值的平均.

下面要证明的是 P 和 U 可以由初等调和函数 $r^n\cos n\theta$ 和 $r^n\sin n\theta$ 的级数表示为如下形式：

$$P(r_0,r,\phi-\theta) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n(\phi-\theta) \quad (r<r_0) \tag{10}$$

和

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \quad (r<r_0), \tag{11}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\cos n\phi\ \mathrm{d}\phi,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\sin n\phi\ \mathrm{d}\phi.$$

其证明留做练习.

118 相关的边值问题

下面给出的结果的证明细节我们留做练习. 假定函数 F 分段连续，边值在圆 $r=r_0$ 上.

假设 F $(2\pi-\theta)$ $=-F$ (θ). 117 节的泊松积分公式 (1) 变为

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[P(r_0,r,\phi-\theta)-P(r_0,r,\phi+\theta)]F(\phi)\mathrm{d}\phi. \tag{1}$$

函数U在圆上水平射线$\theta=0$和$\theta=\pi$处为零，这正如我们所希望的U可以作为稳定温度. 则式 (1) 为半圆区域$r<r_0$，$0<\theta<\pi$的狄利克雷问题的解，其中在直径AB上$U=0$，如图174所示；且在F连续的每个固定的点θ，

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r<r_0}} U(r,\theta) = F(\theta) \quad (0<\theta<\pi). \tag{2}$$

如果$F(2\pi-\theta)=F(\theta)$，则

423

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[P(r_0,r,\phi-\theta)+P(r_0,r,\phi+\theta)]F(\phi)\mathrm{d}\phi; \tag{3}$$

当$\theta=0$或$\theta=\pi$时$U_\theta(r,\theta)=0$. 因此公式 (3) 给出的函数U在半圆区域$r<r_0$，$0<\theta<\pi$内调和，且满足条件 (2)，同样也满足在直径AB的法向导数为零，如图174所示.

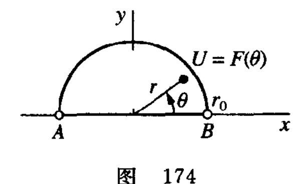


图 174

解析函数$z=r_0^2/Z$映Z平面的圆$|Z|=r_0$为z平面的圆$|z|=r_0$，且映第一个圆的外部为第二个圆的内部. 记$z=r\exp(i\theta)$和$Z=R\exp(i\psi)$，则$r=r_0^2/R$，$\theta=2\pi-\psi$. 117节式 (1) 表示的调和函数$U(r,\theta)$变为函数

$$U\left(\frac{r_0^2}{R},2\pi-\psi\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^2-R^2}{r_0^2-2r_0R\cos(\phi+\psi)+R^2}F(\phi)\mathrm{d}\phi,$$

它在区域$R>r_0$内调和. 通常如果$u(r,\theta)$调和，则$u(r,-\theta)$也调和 (练习11). 因此函数$H(R,\psi)=U(r_0^2/R,\psi-2\pi)$，或

$$H(R,\psi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,R,\phi-\psi)F(\phi)\mathrm{d}\phi \quad (R>r_0) \tag{4}$$

也调和. 在$F(\psi)$连续的每个固定的点ψ，根据117节条件 (2) 得

$$\lim_{\substack{R\to r_0\\ R>r_0}} H(R,\psi) = F(\psi). \tag{5}$$

因此式 (4) 解决了Z平面圆$R=r_0$外区域的狄利克雷问题 (图175). 由116节表达式 (8)，

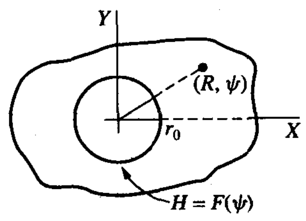


图 175

424

当 $R>r_0$ 时，泊松核 P (r_0，R，$\phi-\psi$) 为负．同样

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,R,\phi-\psi)\mathrm{d}\phi=-1\quad(R>r_0)\tag{6}$$

且

$$\lim_{R\to\infty}H(R,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\mathrm{d}\phi.\tag{7}$$

练习

1．利用 117 节的泊松积分公式 (1)，推导圆柱 $x^2+y^2=1$ 内部的电势表达式

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\arctan\left[\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+(y-1)^2-1}\right]\quad(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi)$$

满足在圆柱表面的第一象限 ($x>0$，$y>0$) $V=1$，在其余部分 $V=0$．同样指出 $1-V$ 为什么是 105 节练习 8 的解．

2．定义 T 为表面绝热的圆盘 $r\leqslant1$ 内的稳定温度，且当 $r=1$ 时，在 $0<\theta<2\theta_0$ ($0<\theta_0<\pi/2$)内 $T=1$，在其余边上 $T=0$．利用泊松积分公式证明

$$T(x,y)=\frac{1}{\pi}\arctan\left[\frac{(1-x^2-y^2)y_0}{(x-1)^2+(y-y_0)^2-y_0^2}\right]\quad(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi),$$

其中 $y_0=\tan\theta_0$．证明该函数满足边界条件．

3．利用三角恒等式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},\quad\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin2\alpha},$$

证明 117 节例子中的解 (5) 可以从前面的 πV (r，θ) 的表达式中获得．

4．定义 I 为有限单位脉冲函数（图 176）：

$$I(h,\theta-\theta_0)=\begin{cases}1/h,\text{当 }\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+h,\\0,\text{当 }0\leqslant\theta<\theta_0\text{ 或 }\theta_0+h<\theta\leqslant2\pi,\end{cases}$$

其中 h 为正数且 $0\leqslant\theta_0<\theta_0+h<2\pi$．注意

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+h}I(h,\theta-\theta_0)\mathrm{d}\theta=1.$$

425

图 176

利用定积分的中值定理证明

$$\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)I(h,\phi-\theta_0)\mathrm{d}\phi = P(r_0,r,c-\theta)\int_{\theta_0}^{\theta_0+h} I(h,\phi-\theta_0)\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\theta_0 \leqslant c \leqslant \theta_0+h$；从而

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)I(h,\phi-\theta_0)\mathrm{d}\phi = P(r_0,r,\theta-\theta_0) \quad (r<r_0).$$

所以泊松核 P（r_0，r，$\theta-\theta_0$）为 h 左趋于 0 时圆 $r=r_0$ 内调和函数的极限. 其中圆的边值用脉冲函数 $2\pi I$（h，$\theta-\theta_0$）表示.

5. 证明 56 节练习 8（b）的用余弦级数的和表示的表达式可以写为

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\theta = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (-1<a<1).$$

然后证明泊松核有 117 节的级数表达式（10).

6. 证明 117 节泊松核的表达式（10）中的级数关于 ϕ 一致收敛. 然后可以由公式（1）得到 U（r，θ）的级数表达式（11）[⊖].

7. 利用 117 节的表达式（11）和（12）求解无限长的实心圆柱 $r\leqslant r_0$ 内的稳定温度 T（r，θ），如果 T（r_0，θ）$=A\cos\theta$. 证明没有热流过平面 $y=0$.

426

答案：$T=\dfrac{A}{r_0}r\cos\theta=\dfrac{A}{r_0}x.$

8. 对无界区域 $R>r_0$，$0<\psi<\pi$（如图 117 所示）内的调和函数 H，推导 118 节公式（4）的特殊形式.

如果在半圆上满足边界条件

$$\lim_{\substack{R\to r_0\\ R>r_0}} H(R,\psi) = F(\psi) \quad (0<\psi<\pi),$$

且（a）在射线 BA 和 DE 上为零；（b）在射线 BA 和 DE 上法向导数为零，推导 118 节公式（4）的特殊形式

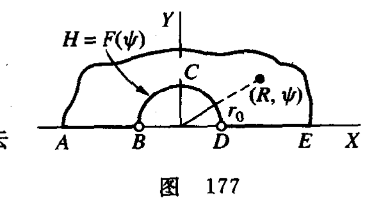


图 177

$$\text{(a)}\quad H(R,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[P(r_0,R,\phi+\psi)-P(r_0,R,\phi-\psi)]F(\phi)\mathrm{d}\phi;$$

$$\text{(b)}\quad H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[P(r_0,R,\phi+\psi)+P(r_0,R,\phi-\psi)]F(\phi)\mathrm{d}\phi.$$

9. 118 节的式（1）作为图 174 所示区域的狄利克雷问题的解，给出其推导细节.

10. 118 节的式（3）作为边值问题的解，给出其推导细节.

11. 作为圆外区域（图 175）的狄利克雷问题的解，求解 118 节的公式（4）. 当 u（r，θ）调和时，利用拉普拉斯方程的极坐标形式

$$r^2u_{rr}(r,\theta)+ru_r(r,\theta)+u_{\theta\theta}(r,\theta)=0$$

⊖ 当 $r_0=1$ 时，用分离变量法可获得该结果. 分离变量法见作者的 *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed. Sec. 48, 2001.

证明 $u(r,-\theta)$ 调和.

12. 解释 118 节的等式（6）是正确的.

13. 推导 118 节的极限（7）.

119 施瓦兹积分公式

令 f 为半平面 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 上的关于 z 的解析函数，使得对某些正数 a 和 M，f 满足阶性质

$$|z^a f(z)|<M \quad (\mathrm{Im}z\geqslant 0). \tag{1}$$

对实轴上方的一个不动点 z，C_R 定义为中心在原点半径为 R 的给定正方向的圆的上部，其中 $R>|z|$（图178）.

427

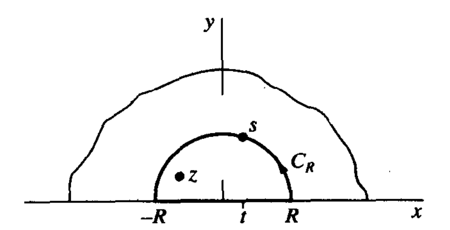


图 178

则根据柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}. \tag{2}$$

当 R 趋于∞时第一个积分趋于 0，根据表达式（1）有

$$\left|\int_{C_R}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}\right|<\frac{M}{R^a(R-|z|)}\pi R=\frac{\pi M}{R^a(1-|z|/R)}.$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}(\mathrm{Im}z>0). \tag{3}$$

条件（1）保证了这个广义积分收敛[⊖]. 它收敛于柯西主值（见 71 节），且表达式（3）为半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 的柯西积分公式.

当点 z 位于实轴下方时，等式（2）的右边为零；因此积分（3）在该点为零. 因此，当 z 在实轴上方时，我们有如下公式，其中 c 是任意一个复常数：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{c}{t-\bar{z}}\right)f(t)\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Im}z>0). \tag{4}$$

⊖ 见 A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3d ed. Chap. 22, 1983.

当 $c=-1$ 和 $c=1$ 时，它可以简化为

428

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(t)}{|t-z|^2}\mathrm{d}t\quad(y>0)\tag{5}$$

和

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-x)f(t)}{|t-z|^2}\mathrm{d}t\quad(y>0).\tag{6}$$

如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，由式（5）和（6）可知，在半平面 $y>0$ 内关于 u 的边值，调和函数 u 和 v 可以用如下公式表示：

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(t,0)}{|t-z|^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t\quad(y>0),\tag{7}$$

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-t)u(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t\quad(y>0).\tag{8}$$

公式（7）称为半平面的施瓦兹积分公式或泊松积分公式. 在下节中，我们将放松公式（7）和（8）的条件.

120 半平面的狄利克雷问题

令 F 定义为 x 的一个实值函数，对所有 x，F 有界，且除去最多有限个跳跃的点外连续. 当 $y\geqslant\varepsilon$ 和 $|x|\leqslant 1/\varepsilon$ 时，其中 ε 是任意正数，积分

$$I(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^2+y^2}$$

关于 x 和 y 一致收敛，被积函数关于 x 和 y 的偏导也一致收敛. 这些函数都是有限个定积分或广义积分的和，其中在每个积分区域上 F 连续；因此当 $y\geqslant\varepsilon$ 时，每一部分积分的被积函数是 t，x，y 的连续函数. 相应地，$I(x,y)$ 的每个偏导可以表示为对应被积函数的导数的积分，其中 $y>0$.

记 $U(x,y)=yI(x,y)/\pi$. 因此 U 是 F 的施瓦兹积分映射，根据 119 节表达式（7）的提示：

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yF(t)}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t\quad(y>0).\tag{1}$$

除去因子 $1/\pi$，核为 $y/|t-z|^2$. 它是函数 $1/(t-z)$ 的虚部，其中函数在 $y>0$ 的 z 点解析. 所以核调和，因此它满足 x 和 y 的拉普拉斯方程. 由于求导和积分可以互换，所以函数（1）也满足这个等式. 即 U 在 $y>0$ 调和.

429

为了证明在 F 连续的每个固定的 x，

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}U(x,y)=F(x),\tag{2}$$

把 $t=x+y\tan\tau$ 代入公式（1）得

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}F(x+y\tan\tau)\mathrm{d}\tau\quad(y>0).\tag{3}$$

如果

$$G(x,y,\tau)=F(x+y\tan\tau)-F(x)$$

且 α 为某个小正数，则

$$\pi[U(x,y)-F(x)]=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}G(x,y,\tau)\mathrm{d}\tau=I_1(y)+I_2(y)+I_3(y), \tag{4}$$

其中

$$I_1(y)=\int_{-\pi/2}^{(-\pi/2)+\alpha}G(x,y,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$I_2(y)=\int_{(-\pi/2)+\alpha}^{(\pi/2)-\alpha}G(x,y,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$I_3(y)=\int_{(\pi/2)-\alpha}^{\pi/2}G(x,y,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

如果定义 M 为 $|F(x)|$ 的上界，则 $|G(x,y,\tau)|\leqslant 2M$. 对给定正数 ε，选取 α 满足 $6M\alpha<\varepsilon$；即

$$|I_1(y)|\leqslant 2M\alpha<\frac{\varepsilon}{3} \quad 和 \quad |I_3(y)|\leqslant 2M\alpha<\frac{\varepsilon}{3}.$$

下面证明，对于 ε，总存在正数 δ 满足当 $0<y<\delta$ 时，

$$|I_2(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

为了得到这个结果，我们注意，因为 F 在 x 连续，则存在正数 γ 满足当 $0<y|\tan\tau|<\gamma$ 时，

$$|G(x,y,\tau)|<\frac{\varepsilon}{3\pi}.$$

当 τ 在 $(-\pi/2)+\alpha$ 和 $(\pi/2)-\alpha$ 之间变化时，$|\tan\tau|$ 的最大值为 $\tan[(\pi/2)-\alpha]=\cot\alpha$. 因此，如果我们记 $\delta=\gamma\tan\alpha$，则当 $0<y<\delta$ 时，

$$|I_2(y)|<\frac{\varepsilon}{3\pi}(\pi-2\alpha)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

430

因此我们证明了当 $0<y<\delta$ 时，

$$|I_1(y)|+|I_2(y)|+|I_3(y)|<\varepsilon.$$

条件 (2) 可以由这个结果和等式 (4) 得出.

所以公式 (1) 解决了具有边界条件 (2) 的半平面 $y>0$ 内的狄利克雷问题. 从表达式 (1) 的形式 (3) 显然有在半平面内 $|U(x,y)|\leqslant M$，其中 M 为 $|F(x)|$ 的上界；即 U 有界. 我们注意当 $F(x)=F_0$ 时 $U(x,y)=F_0$，其中 F_0 为一常数.

根据 119 节的公式 (8)，在 F 的一定条件下，函数

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-t)F(t)}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t \quad (y>0) \tag{5}$$

为公式 (1) 给出的函数 U 的共轭调和函数. 事实上，公式 (5) 给出了 U 的一个共轭调和函数，如果 F 除去最多有限个跳跃点外处处连续，且 F 满足性质

$$|x^a F(x)| < M \quad (a > 0).$$

在这些条件下，我们发现当 $y>0$ 时，U 和 V 满足柯西－黎曼方程.

当 F 为奇函数或偶函数时，公式（1）的特殊形式留做练习.

练习

1. 有界函数 U 作为式（1）的特殊形式，推导其表达式为

$$U(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} - \frac{1}{(t+x)^2}+y^2\right]F(t)\mathrm{d}t \quad (x>0, y>0),$$

其中 U 在第一象限调和，且满足边界条件

$$U(0,y) = 0 \quad (y>0)$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U(x,y) = F(x) \quad (x>0, x\neq x_j)$$

其中对所有正 x，F 有界，且除去最多有限个跳跃点 x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）连续.

2. 定义 $T(x, y)$ 为表面绝热的平面 $x>0$，$y>0$ 的有界稳定温度，且

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} T(x,y) = F_1(x) \quad (x>0),$$

431

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T(x,y) = F_2(y) \quad (y>0)$$

（图 179）. F_1 和 F_2 除去最多有限个跳跃点外有界连续. 记 $x+iy=z$ 并通过练习 1 得到的表达式证明

$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) \quad (x>0, y>0),$$

其中

$$T_1(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{|t+z|^2}\right)F_1(t)\mathrm{d}t,$$

$$T_2(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|it-z|^2} - \frac{1}{|it+z|^2}\right)F_2(t)\mathrm{d}t.$$

y
$T=F_2(y)$
$T=F_1(x)$
x

图 179

3. 作为 120 节公式（1）的特殊形式，推导有界函数 U 的表达式为

$$U(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} + \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]F(t)\mathrm{d}t \quad (x>0, y>0),$$

U 在第一象限调和，且满足边界条件

$$U_x(0,y) = 0 \quad (y>0),$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U(x,y) = F(x) \quad (x>0, x\neq x_j),$$

其中 F 在所有正 x 有界，且除去最多有限个点 $x=x_j$（$j=1, 2, \cdots, n$）连续.

4. 在 120 节中交换 x 轴和 y 轴，则半平面 $x>0$ 内狄利克雷问题的解为

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{xF(t)}{(t-y)^2+x^2}\mathrm{d}t \quad (x>0).$$

记

$$F(y)=\begin{cases}1, & \text{当} -1<y<1 \text{时}\\ 0, & \text{当} |y|>1 \text{时}\end{cases}$$

则可得 U 和它的共轭调和 $-V$ 的表达式为

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{y+1}{x}-\arctan\frac{y-1}{x}\right),$$

$$V(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2},$$

432

其中 $-\pi/2\leqslant\arctan t\leqslant\pi/2$. 同样证明

$$V(x,y)+iU(x,y)=\frac{1}{\pi}[\mathrm{Log}(z+i)-\mathrm{Log}(z-i)],$$

其中 $z=x+iy$.

121 诺伊曼问题

同 116 节图 172 一样，我们记 $s=r_0\exp(i\phi)$ 和 $z=r\exp(i\theta)$，其中 $r<r_0$. 当 s 固定，函数

$$Q(r_0,r,\phi-\theta)=-2r_0\ln|s-z|=-r_0\ln[r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2] \tag{1}$$

在圆 $|z|=r_0$ 的内部调和，因为它是 $-2r_0\log(z-s)$ 的实部，其中 $\log(z-s)$ 的支割线为从点 s 出发的向外的射线. 更进一步，如果 $r\neq0$，

$$\begin{aligned}Q_r(r_0,r,\phi-\theta)&=-\frac{r_0}{r}\left[\frac{2r^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}\right]\\&=\frac{r_0}{r}[P(r_0,r,\phi-\theta)-1],\end{aligned} \tag{2}$$

其中 P 为 116 节的泊松核 (7).

这些观察的结果表明函数 Q 可以被调和函数 U 的积分表达式表示. 其中 U 的法向导数 U_r 在圆 $r=r_0$ 上假定为指定的值 $G(\theta)$.

如果 G 分段连续且 U_0 为任意常数，则函数

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(r_0,r,\phi-\theta)G(\phi)\mathrm{d}\phi+U_0\quad(r<r_0) \tag{3}$$

调和，因为被积函数为关于 r 和 θ 的调和函数. 如果 G 在圆 $|z|=r_0$ 上的平均值为零，或

$$\int_0^{2\pi}G(\phi)\mathrm{d}\phi=0, \tag{4}$$

则应用等式 (2)，

$$\begin{aligned}U_r(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0}{r}[P(r_0,r,\phi-\theta)-1]G(\phi)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{r_0}{r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)G(\phi)\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

433

根据 117 节的等式 (1) 和 (2)，

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r < r_0}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) G(\phi) \mathrm{d}\phi = G(\theta).$$

因此对 G 连续的每个 θ 有

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r < r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta). \tag{5}$$

当 G 分段连续且满足条件（4），公式

$$U(r,\theta) = -\frac{r_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln[r_0^2 - 2r_0 r\cos(\phi - \theta) + r^2] G(\phi) \mathrm{d}\phi + U_0 \quad (r < r_0), \tag{6}$$

为圆 $r = r_0$ 内部区域的诺伊曼问题的解，其中在条件（5）的意义下，G（θ）为调和函数 U（r，θ）、在边界的法向导数. 注意从等式（4）和等式（6）可知，因为 $\ln r_0^2$ 为常数，则 U_0 为 U 在圆 $r = r_0$ 的中心 $r = 0$ 的值.

值 U（r，θ）可以表示表面绝热的圆盘 $r < r_0$ 内的稳定温度. 在这种情况下，条件（5）表明热量沿和 G（θ）相对称的边流入圆盘. 条件（4）自然要求热量流入圆盘的总流速为零，因为温度不随时间变化.

在圆 $r = r_0$ 的外部区域，和函数 H 对应的公式可以由 Q 表示

$$H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_0, R, \phi - \psi) G(\phi) \mathrm{d}\phi + H_0 \quad (R > r_0), \tag{7}$$

其中 H_0 为常数. 和前面一样，我们假设 G 分段连续且满足条件（4）. 则对 G 连续的每个 ψ

$$H_0 = \lim_{R \to \infty} H(R, \psi)$$

和

$$\lim_{\substack{R \to r_0 \\ R > r_0}} H_R(R, \psi) = G(\psi). \tag{8}$$

作为公式（3）应用到半圆区域的特殊形式（7）的证明留作练习.

现在转向半平面，我们假定除去有限跳跃点外对所有实 x 有 G（x）连续，且令它满足指定的性质

434

$$| x^a G(x) | < M \quad (a > 1), \tag{9}$$

其中 $-\infty < x < \infty$. 对每个固定的实数 t，函数 $\mathrm{Log}\,|z - t|$ 在半平面 $\mathrm{Im} z > 0$ 调和. 函数

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z - t| G(t) \mathrm{d}t + U_0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t-x)^2 + y^2] G(t) \mathrm{d}t + U_0 \quad (y > 0), \end{aligned} \tag{10}$$

在半平面调和，其中 U_0 为实数.

用 120 节的施瓦兹积分映射（1）记公式（10）；从公式（10）有

$$U_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{(t-x)^2 + y^2} \mathrm{d}t \quad (y > 0). \tag{11}$$

利用 120 节的等式（1）和（2），在 G 连续的每个点 x 有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U_y(x,y) = G(x). \tag{12}$$

积分公式（10）显然解决了半平面 $y>0$ 内满足边界条件（12）的诺伊曼问题．但我们并不要求在 G 上满足当 $|z|$ 增加时，调和函数 U 有界．

当 G 为奇函数，式（10）为

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \ln\left[\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right]G(t)\mathrm{d}t \quad (x>0, y>0). \tag{13}$$

这表明函数在第一象限 $x>0$，$y>0$ 调和且满足边界条件

$$U(0,y) = 0 \quad (y>0), \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U_y(x,y) = G(x) \quad (x>0). \tag{15}$$

练习

1. 利用前面章节的结果，推导圆 $r=r_0$ 外区域的诺伊曼问题的解为公式（7）.

2. 作为 121 节公式（3）的特殊形式，函数 U 的表达式为

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[Q(r_0,r,\phi-\theta) - Q(r_0,r,\phi+\theta)]G(\phi)\mathrm{d}\phi,$$

435

其中函数 U 在半圆区域 $r<r_0$，$0<\theta<\pi$ 调和，且对 G 连续的每个 θ 满足边界条件

$$U(r,0) = U(r,\pi) = 0 \quad (r<r_0),$$

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r<r_0}} U_r(r,\theta) = G(\theta) \quad (0<\theta<\pi).$$

3. 作为 121 节公式（3）的特殊形式，函数 U 的表达式为

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[Q(r_0,r,\phi-\theta) + Q(r_0,r,\phi+\theta)]G(\phi)\mathrm{d}\phi + U_0$$

其中函数 U 在半圆区域 $r<r_0$，$0<\theta<\pi$ 调和，且对 G 连续的每个 θ 满足边界条件

$$U_\theta(r,0) = U_\theta(r,\pi) = 0 \quad (r<r_0),$$

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r<r_0}} U_r(r,\theta) = G(\theta) \quad (0<\theta<\pi),$$

且规定

$$\int_0^{\pi} G(\phi)\mathrm{d}\phi = 0.$$

4. 定义 $T(x, y)$ 为区域 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 内的稳定温度．区域表面绝热，在边 $x=0$ 上 $T=0$．热量（100 节）沿边 $y=0$ 的一段 $0<x<1$ 流入平面的值为常数 A，在边的其余部分绝热．利用 121 节公式（13）证明沿边 $x=0$ 流出区域的热量为

$$\frac{A}{\pi}\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right).$$

436

附录A 参考文献

下面列出了一部分参考的书目，当然这里所列出的并不完全。进一步的文献可以从这里所列出的许多书中找到。

理 论

Ahlfors, L. V.: "Complex Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1979.

Antimirov, M. Ya., A. A. Kolyshkin, and R. Vaillancourt: "Complex Variables," Academic Press, San Diego, 1998.

Bak, J., and D. J. Newman: "Complex Analysis," 2d ed., Springer-Verlag, New York, 1997.

Bieberbach, L.: "Conformal Mapping," American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

Boas, R. P.: "Invitation to Complex Analysis", The McGraw-Hill Companies, New York, 1987.

——: "Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 2, p. 180, 1964.

Carathéodory, C.: "Conformal Representation", Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1952.

——: "Theory of Functions of a Complex Variable," American Mathematical Society, Providence, RI, 1954.

Conway, J. B.: "Functions of One Complex Variable," 2d ed., 6th Printing, Springer-Verlag, New York, 1997.

Copson, E. T.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1962.

Evans, G. C.: "The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems," American Mathematical Society, Providence, RI, 1927.

Fisher, S. D.: "Complex Variables," 2d ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1990.

Flanigan, F. J.: "Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1983.

Hille, E.: "Analytic Function Theory," Vols. 1 and 2, 2d ed., Chelsea Publishing Co.. New York, 1973.

Kaplan, W.: "Advanced Calculus," 5th ed., Addison-Wesley Higher Mathematics, Boston, MA, 2003.

——: "Advanced Mathematics for Engineers," TechBooks, Marietta, OH, 1992.

Kellogg, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Dover Publications, Inc., New York, 1953.

Knopp, K.: "Elements of the Theory of Functions," translated by F. Bagemihl, Dover

Publications, Inc., Mineola, NY, 1952.

——: "Problem Book in the Theory of Functions," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2000.

Krantz, S. G.: "Complex Analysis: The Geometric Viewpoint," Garus Mathematical Monograph Series, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.

——: "Handbook of Complex Variables," Birkhäuser Boston, Cambridge, MA, 2000.

Krzyż, J. G.: "Problems in Complex Variable Theory," Elsevier Science New York, 1972.

Lang, S.: "Complex Analysis", 3d ed, Springer-Verlag, New York 1993.

Levinson, N., and R. M. Redheffer: "Complex Variables," The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1988.

Markushevich, A. I.: "Theory of Functions of a Complex Variable," 3 vols. in one, 2d ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.

Marsden, J. E., and M. J. Hoffman: "Basic Complex Analysis," 2d ed., W. H. Freeman & Company, New York, 1987.

Mathews, J. H., and R. W. Howell: "Complex Analysis for Mathematics and Engineering," 4th ed, Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, MA, 2001.

Mitrinović, D. S.: "Calculus of Residues," P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1966.

Nahin, P. J.: "An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$," Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

Nehari, Z.: "Conformal Mapping," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1975.

Newman, M. H. A.: "Elements of the Toplogy of Plane Sets of Points" 2d ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1999.

Pennisi, L. L.: "Elements of Complex Variables," 2d ed., Holt, Rinehart & Winston, Inc., Austin, Tx, 1976.

Rubenfeld, L. A.: "A First Course in Applied Complex Variables," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

Saff, E. B., and A. D. Snider: "Fundamentals of Complex Analysis," 3d ed., Prentice-Hall PTR, Paramus, NJ, 2001.

Silverman, R. A.: "Complex Analysis with Applications," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.

Springer, G.: "Introduction to Riemann Surfaces," 2d ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1981.

Taylor, A. E., and W. R. Mann: "Advanced Calculus," 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.

Thron, W. J.: "Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

Titchmarsh, E. C.: "Theory of Functions," 2d ed., Oxford University Press, Inc., New York, 1976.

Volkovyskii, L. I., G. L. Lunts, and I. G. Aramanovich: "A Collection of Problems on Complex Analysis," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1992.

Whittaker, E. T., and G. N. Waston: "A Course of Modern Analysis," 4th ed., Cambridge University Press, New York, 1996. 438

应 用

Bowman, F.: "Introduction to Elliptic Functions, with Applications," English Universities Press, London, 1953.

Brown, G. H., C. N. Hoyler, and R. A. Bierwirth: "Theory and Application of Radio-Frequency Heating," D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1947.

Brown, J. W., and R. V. Churchill: "Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 2001.

Churchill R. V.: "Operational Mathematics," 3d ed, McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1972.

Dettman, J. W.: "Applied Complex Variables," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.

Fourier, J.: "The Analytical Theory of Heat," translated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

Hayt, W. H., Jr. and J. A. Buck: "Engineering Electromagnetics," 6th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 2000.

Henrici, P.: "Applied and Computational Complex Analysis," Vols. 1, 2, and 3, John Wiley & Sons, Inc., 1988, 1991, and 1993.

Jeffrey, A.: "Complex Analysis and Applications," CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

Kober, H.: "Dictionary of Conformal Representations," Dover Publications, Inc., New York, 1952.

Lebedev, N. N.: "Special Functions and Their Applications," rev. ed., translated by R. Silverman, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1972.

Love, A. E.: "Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1944.

Milne-Thomson, L. M.: "Theoretical Hydrodynamics," 5th ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996.

Oppenheim, A. V., R. W. Schafer, and J. R. Buck: "Discrete-Time Signal Processing," 2d ed., Prentice-Hall PTR, Paramus, NJ, 1999.

Sokolnikoff, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., Krieger Publishing Com-

pany, Melbourne, FL, 1983.

Streeter, V. L., E. B. Wylie, and K. W. Bedford: "Fluid Mechanics," 9th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1997.

Timoshenko, S. P., and J. N. Goodier: "Theory of Elasticity," 3d ed., The McGraw-Hill Companies, New York, 1970.

Wen, G. -C.: "Conformal Mappings and Boundary Value Problems," Translations of Mathematical Monographs, Vol. 106, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

439

附录 B 区域映射图清单（见第 8 章）

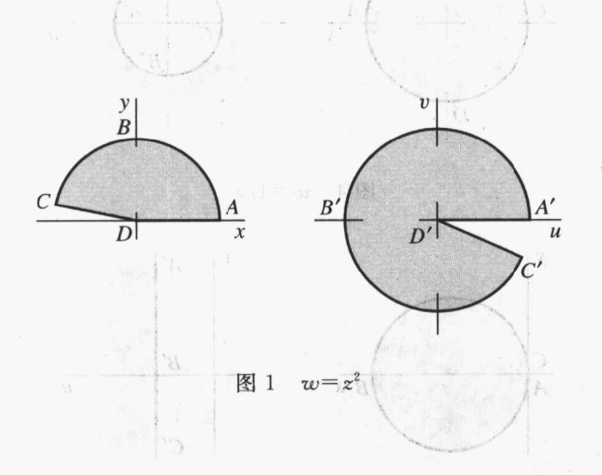
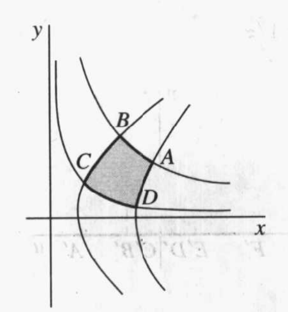


图 1 $w=z^2$



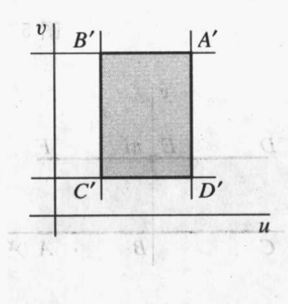


图 2 $w=z^2$

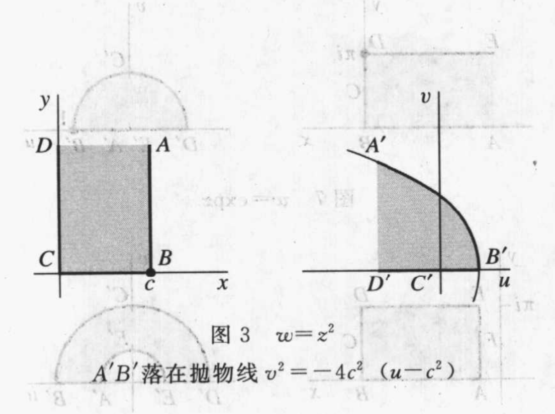


图 3 $w=z^2$

$A'B'$落在抛物线 $v^2=-4c^2\ (u-c^2)$

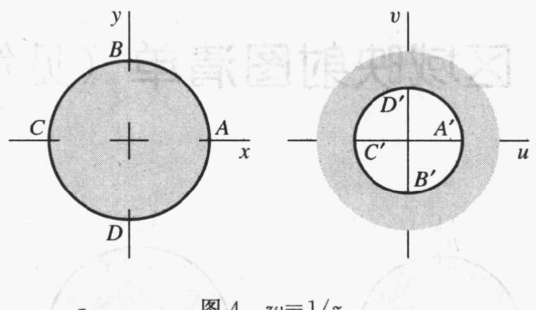


图 4　$w=1/z$

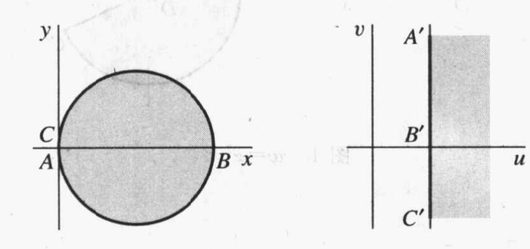
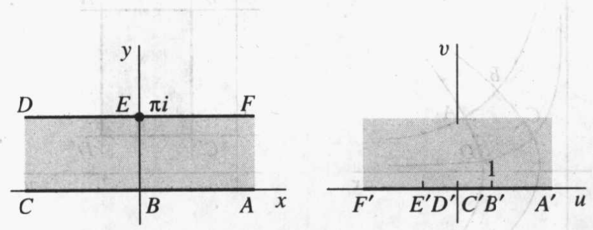


图 5　$w=1/z$



442

图 6　$w=\exp z$

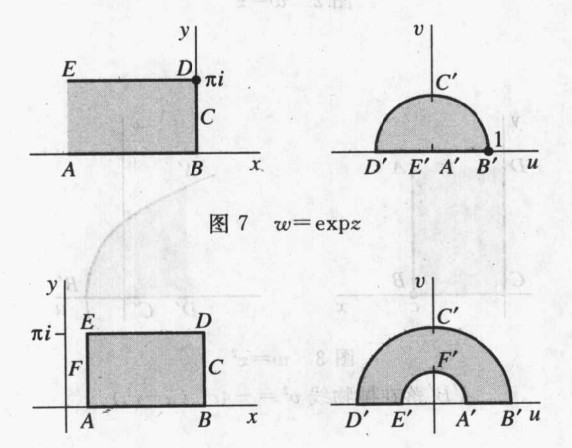


图 7　$w=\exp z$

图 8　$w=\exp z$

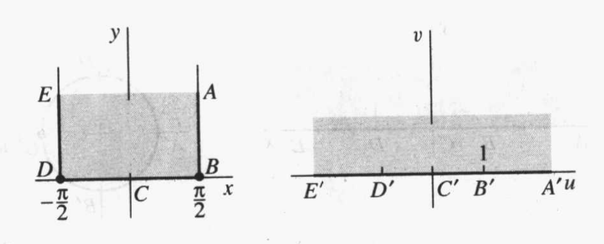


图 9　$w=\sin z$

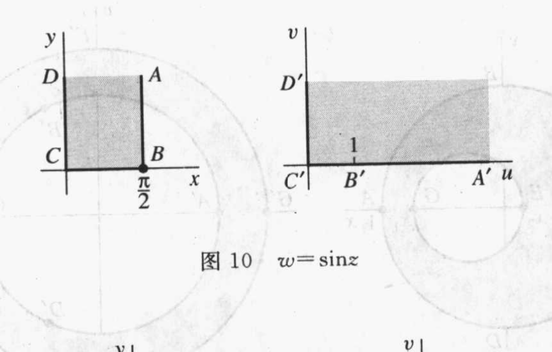


图 10　$w=\sin z$

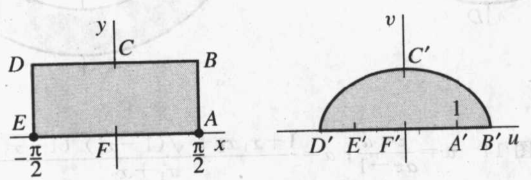


图 11　$w=\sin z$；BCD 在直线 $y=b$（$b>0$）

$B'C'D'$在椭圆$\dfrac{u^2}{\cosh^2 b}+\dfrac{v^2}{\sinh^2 b}=1$

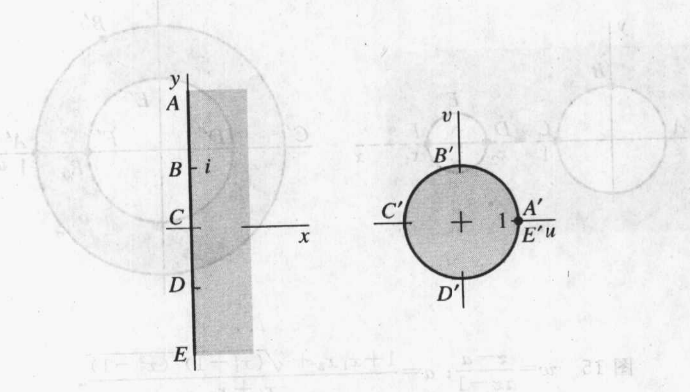
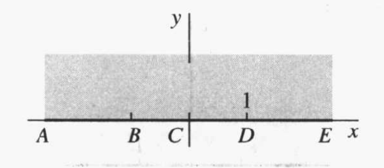


图 12　$w=\dfrac{z-1}{z+1}$



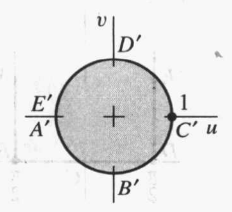
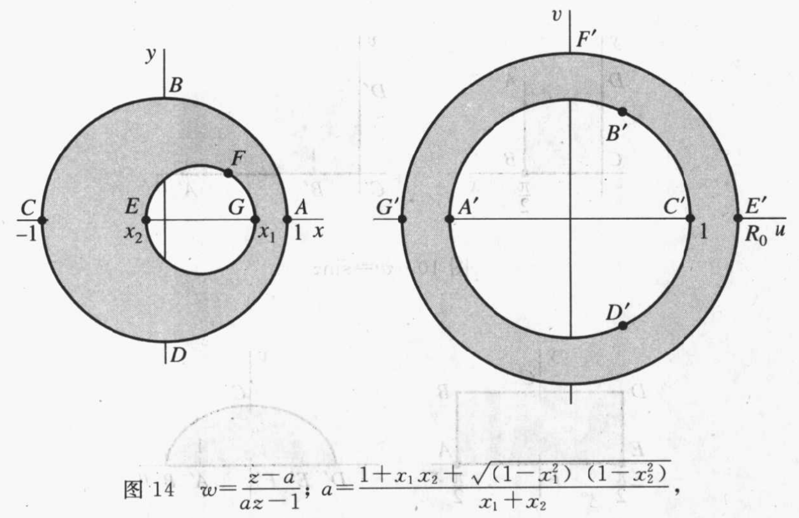


图 13 $w=\frac{i-z}{i+z}$



444

图 14 $w=\frac{z-a}{az-1}$；$a=\frac{1+x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}$，

$R_0=\frac{1-x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2}$（$a>1$ 和 $R_0>1$ 当 $-1<x_2<x_1<1$）

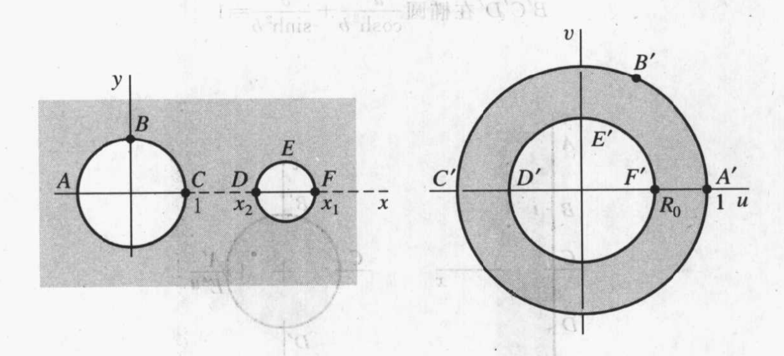


图 15 $w=\frac{z-a}{az-1}$；$a=\frac{1+x_1x_2+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}$，

$R_0=\frac{x_1x_2-1-\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}$（$x_2<a<x_1$ 且 $0<R_0<1$ 当 $1<x_2<x_1$）

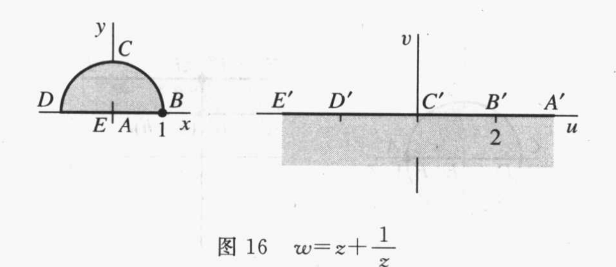


图 16　$w=z+\frac{1}{z}$

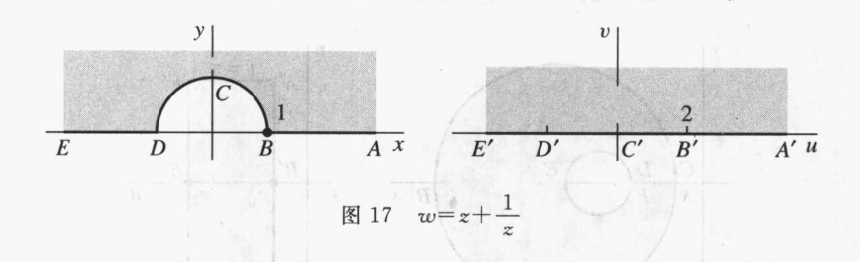


图 17　$w=z+\frac{1}{z}$

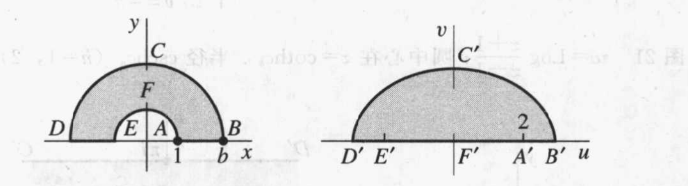


图 18　$w=z+\frac{1}{z}$；$B'C'D'$ 在椭圆 $\frac{u^2}{(b+1/b)^2}+\frac{v^2}{(b-1/b)^2}=1$

445

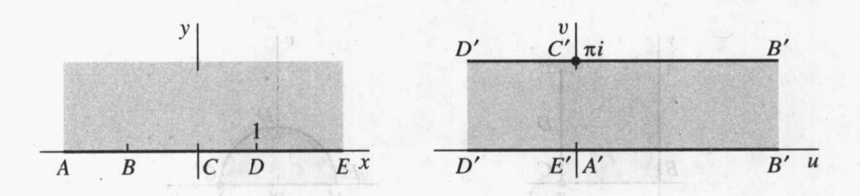


图 19　$w=\mathrm{Log}\frac{z-1}{z+1}$；$z=-\coth\frac{w}{2}$

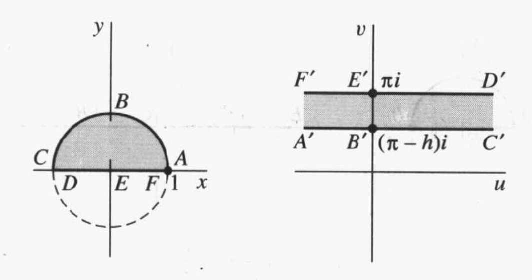


图 20　$w=\text{Log}\,\dfrac{z-1}{z+1}$；

ABC 在圆 $x^2+(y+\coth h)^2=\csc^2 h$ $(0<h<\pi)$

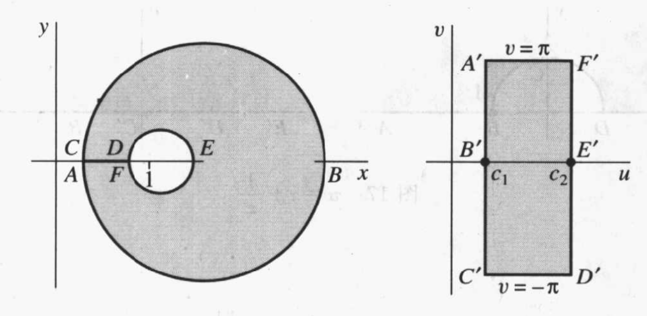


图 21　$w=\text{Log}\,\dfrac{z+1}{z-1}$；圆中心在 $z=\coth c_n$，半径 $\text{csch}\,c_n$ $(n=1, 2)$

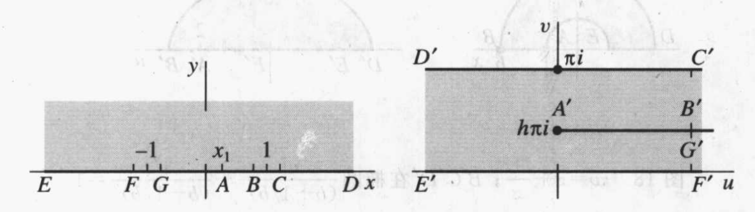
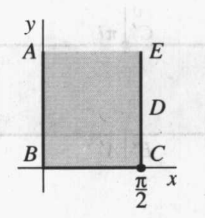


图 22　$w=h\ln\dfrac{h}{1-h}+\ln 2(1-h)+i\pi-h\text{Log}(z+1)-(1-h)\text{Log}(z-1)$；

$x_1=2h-1$



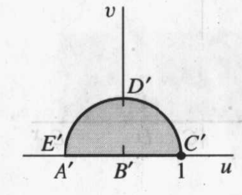


图 23　$w=\left(\tan\dfrac{z}{2}\right)^2=\dfrac{1-\cos z}{1+\cos z}$

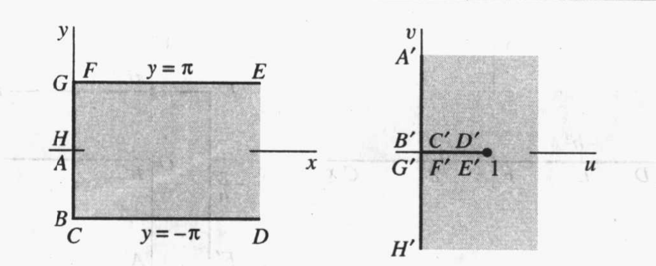


图 24　$w=\coth\dfrac{z}{2}=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$

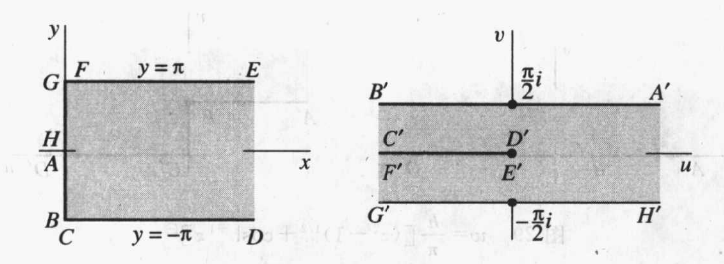


图 25　$w=\mathrm{Log}\left(\coth\dfrac{z}{2}\right)$

447

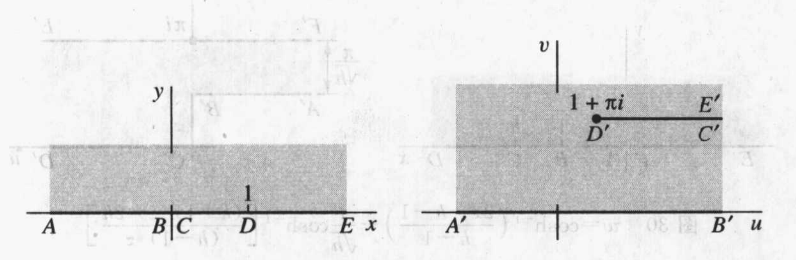


图 26　$w=\pi i+z-\mathrm{Log}z$

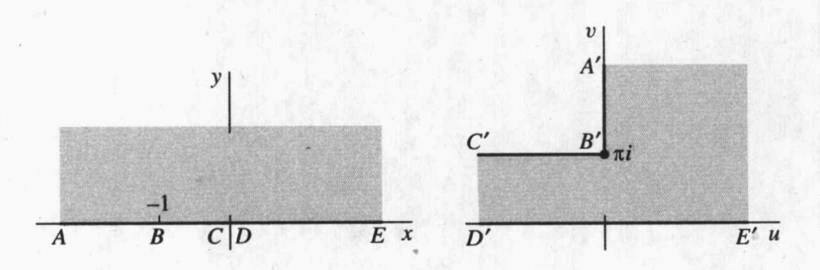
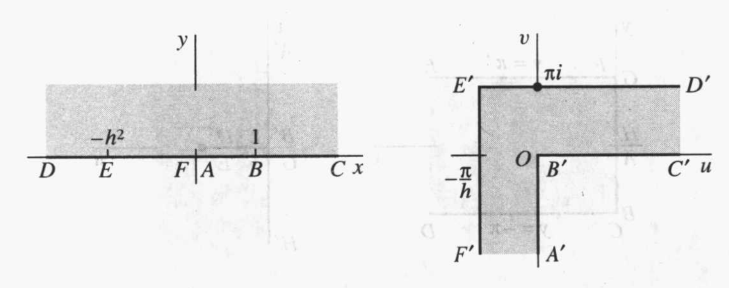


图 27　$w=2\,(z+1)^{1/2}+\mathrm{Log}\dfrac{(z+1)^{1/2}-1}{(z+1)^{1/2}+1}$



448

图 28 $w=\frac{i}{h}\text{Log}\frac{1+iht}{1-iht}+\text{Log}\frac{1+t}{1-t}$；$t=\left(\frac{z-1}{z+h^2}\right)^{1/2}$

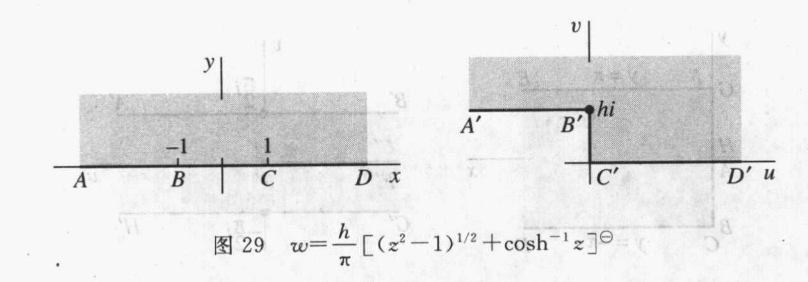
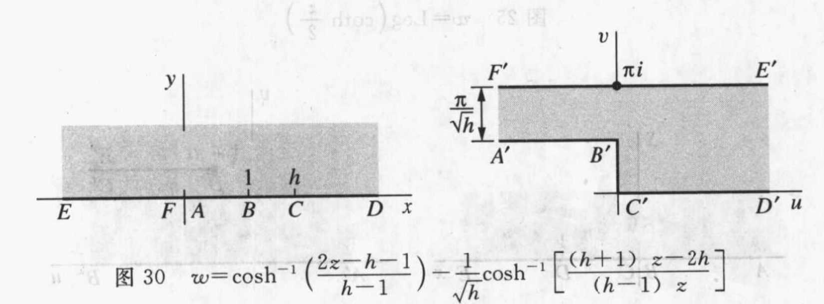


图 29 $w=\frac{h}{\pi}[(z^2-1)^{1/2}+\cosh^{-1}z]$[⊖]



449

图 30 $w=\cosh^{-1}\left(\frac{2z-h-1}{h-1}\right)-\frac{1}{\sqrt{h}}\cosh^{-1}\left[\frac{(h+1)\ z-2h}{(h-1)\ z}\right]$

⊖ 见 115 节练习 3.

索　引

索引中标注的页码为英文原书页码，与书中边栏的页码一致。

D

E

F

G

H

I

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

Z